



FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

FACHBEREICH MATHEMATIK

LEHRGEBIET KOMPLEXE ANALYSIS

Prof. Dr. Andrei Duma

Seminar 1073 - Funktionentheorie

**Stetige Abhängigkeit der Lösungen von
Differentialgleichungen von den Anfangsbedingungen**

Ulrich Telle

Matrikel-Nr. 1471341

Köln, den 15./16. Oktober 2005

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 2 | Reelle dynamische Systeme | 3 |
| 2.1 | Lemma von Gronwall | 3 |
| 2.2 | Differenz von Lösungen mit unterschiedlichen Anfangswerten | 4 |
| 2.3 | Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten | 7 |
| 3 | Komplexe dynamische Systeme | 8 |
| 3.1 | Lemma von Gronwall | 8 |
| 3.2 | Differenz von Lösungen mit unterschiedlichen Anfangswerten | 8 |
| 3.3 | Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten | 9 |
| 4 | Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung | 10 |
| 4.1 | Existenz und Stetigkeit der globalen Lösung | 10 |
| 4.2 | Lösungsraum eines homogenen linearen Systems | 12 |
| 4.3 | Lösungsraum eines inhomogenen linearen Systems | 12 |
| 5 | Differenz von Lösungen verschiedener DGLn bei gleichen Anfangswerten | 14 |

1 Einleitung

Dynamische Systeme sind mathematische Modelle für zeitabhängige Prozesse, deren Darstellung in der Regel auf Systemen von Differentialgleichungen beruht. Ein wesentliches Merkmal der Theorie dynamischer Systeme ist die Verbindung quantitativer und qualitativer Aspekte der Beschreibung.

Eine explizite formelmäßige Lösung dynamischer Systeme ist in den seltensten Fällen möglich. Daher ist man einerseits an der Berechnung möglichst genauer numerischer Näherungslösungen und andererseits an Aussagen über das qualitative Verhalten der Lösungen interessiert.

Approximationen der exakten Lösung einer Differentialgleichung beruhen auf einer steten Verfeinerung des Berechnungsrasters, in dem der Abstand der Rasterpunkte gegen Null geht. Numerisch führt dies allerdings zu erheblichen Schwierigkeiten, da sowohl die Zahldarstellung als auch die Diskretisierung nur eine begrenzte Genauigkeit bietet.

Der Fragestellung, welchen Einfluss kleine Variationen der Anfangswerte auf das Lösungsverhalten und die Stabilität eines dynamischen Systems haben, gewinnt vor diesem Hintergrund besondere Bedeutung.

In dieser Ausarbeitung wird gezeigt, dass die Lösungen stetig von den Anfangsbedingungen abhängen, falls die Differentialgleichungen einer Lipschitzbedingung genügen. Die Untersuchungen werden sowohl für reelle als auch komplexe Differentialgleichungssysteme durchgeführt.

2 Reelle dynamische Systeme

2.1 Lemma von Gronwall

Das Lemma von Gronwall erlaubt die Abschätzung einer Funktion mit Hilfe der Exponentialfunktion. Da auf diesen Sachverhalt in späteren Beweisen mehrfach zurückgegriffen wird, soll hier zunächst dieses Lemma vorgestellt und bewiesen werden.

Lemma 2.1 Sei $]a, b[$ ein offenes Intervall auf \mathbb{R} und $c \in]a, b[$. Die Funktion $u :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $u(t) \geq 0$ für alle $t \in]a, b[$. Wenn es reelle Konstanten $C \geq 0$ und $K \geq 0$ gibt, so dass

$$u(t) \leq C + K \left| \int_c^t u(s) ds \right|$$

für alle $t \in]a, b[$, dann gilt für alle $t \in]a, b[$:

$$u(t) \leq C e^{K|t-c|}$$

Bemerkung: Das Lemma bleibt auch für ein kompaktes Intervall $[a, b]$ richtig.

Beweis: Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $t \geq c, C > 0$ Sei $U : [c, b[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert als

$$U(t) := C + K \int_c^t u(s) ds$$

Gemäß Voraussetzung gilt $u(t) \leq U(t)$ und $U(t) > 0$ für alle $t \in [c, b[$. Aus

$$U'(t) = Ku(t) \leq KU(t)$$

für alle $t \in [c, b[$ folgt

$$\frac{d}{dt} \log(U(t)) = \frac{U'(t)}{U(t)} \leq K$$

Durch Integration erhält man $\log(U(t)) - \log(U(c)) \leq K(t - c)$. Wegen $U(c) = C$ folgt $\log(U(t)) \leq \log(C) + K(t - c)$ und somit

$$u(t) \leq U(t) \leq C e^{K(t-c)}$$

für alle $t \in [c, b[$.

Fall 2: $t \geq c, C = 0$ Sei $(C_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $C_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} C_i = 0$. Gemäß Voraussetzung gilt

$$u(t) \leq C_i + K \int_c^t u(s) ds$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [c, b[$. Aus Fall 1 folgt $u(t) \leq C_i e^{K(t-c)}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle $t \in [c, b[$. Damit gilt nun aber $u(t) = 0$ für alle $t \in [c, b[$.

Fall 3: $t \leq c$ Sei $w : [0, c - a[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $w(\tau) := u(c - \tau)$. Aus der Voraussetzung

$$u(t) \leq C + K \left| \int_c^t u(s) ds \right|$$

für $t \in]a, c]$ folgt für $\tau \in [0, c - a[$

$$\begin{aligned} w(\tau) &= u(c - \tau) \leq C + K \left| \int_c^{c-\tau} u(s) ds \right| \\ &= C + K \left| \int_0^\tau u(c - \sigma) d(-\sigma) \right| = C + K \int_0^\tau w(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Für alle $\tau \in [0, c - a[$ folgt aus Fall 1 und Fall 2, dass $w(\tau) \leq Ce^{K\tau}$. Mittels der Substitution $\tau = c - t$ folgt für alle $t \in]a, c]$

$$u(t) \leq Ce^{K(c-t)} = Ce^{K|t-c|}$$

2.2 Differenz von Lösungen mit unterschiedlichen Anfangswerten

Der folgende Satz beinhaltet eine Abschätzung der Differenz von Lösungen eines Differentialgleichungssystems in Abhängigkeit von der Differenz der Anfangswerte:

Satz 2.1 (1.4.4) Sei D ein Gebiet in $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ist. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei stetig und Lipschitz stetig bzgl. der zweiten Variablen im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und holomorph im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Es sei K eine kompakte Teilmenge von D , L eine Lipschitzkonstante der Beschränkung $f : K \rightarrow \mathbb{K}^n$ und $M := \max\{\|f(t, x)\|\}; (t, x) \in K\}$.

I sei eine relativ kompakte, konvexe, offene Teilmenge von \mathbb{K} . $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ seien stetig differenzierbare Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$, die den Anfangsbedingungen $\phi(t_0) = x_0$ und $\psi(t_1) = x_1$ genügen, wobei die Graphen

$$G_\phi := \{(t, \phi(t)); t \in I\}, G_\psi := \{(t, \psi(t)); t \in I\}$$

in K enthalten sind.

Dann gilt für alle $t \in I$ die Ungleichung

$$\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|)e^{L|t-t_1|}$$

Beweis: Dass ϕ und ψ auf I Lösungen der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ mit den Anfangsbedingungen $\phi(t_0) = x_0, \psi(t_1) = x_1$ sind, kann auch in Form von Integralgleichungen für alle $t \in I$ formuliert werden:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds \\ &= \phi(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \phi(s)) ds + \int_{t_1}^t f(s, \phi(s)) ds \\ \psi(t) &= \psi(t_1) + \int_{t_1}^t f(s, \psi(s)) ds \end{aligned}$$

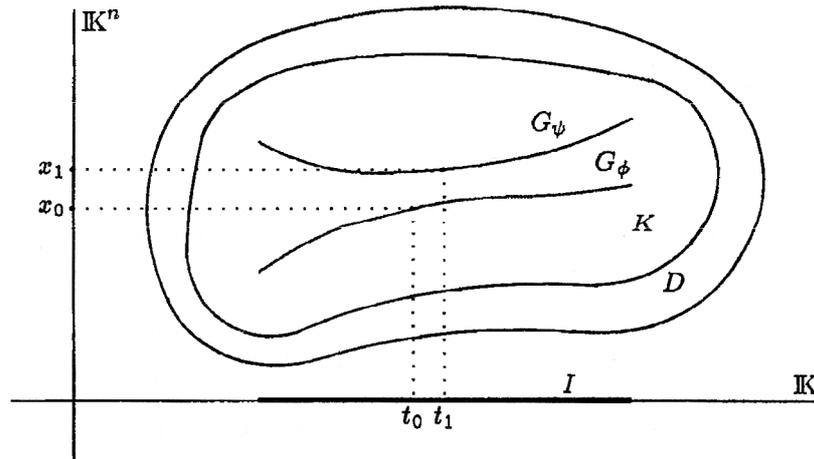


Abbildung 1: Lösungen mit unterschiedlichen Anfangsbedingungen

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sind die Funktionen f , ϕ und ψ holomorph und wegen der Konvexität von I sind die Integrale wegunabhängig. Daher können stets die Verbindungsstrecken als Integrationswege gewählt werden.

Setzt man $u(t) := \|\psi(t) - \phi(t)\|$ für $t \in I$ und $C := \|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|$, so gilt für alle $t \in I$:

$$u(t) \geq 0, u(t) \leq C + L \left| \int_{t_1}^t u(s) ds \right|$$

Mit Hilfe des Gronwall-Lemmas folgt dann für alle $t \in I$:

$$u(t) \leq C e^{L|t-t_1|}$$

bzw.

$$\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|) e^{L|t-t_1|}$$

Im folgenden Satz wird gezeigt, dass es zu jeder Umgebung U der Lösung eines A.W.P. mit Anfangsbedingung (t_0, x_0) eine δ -Umgebung ihrer Anfangsbedingung gibt, so dass es für alle Anfangsbedingungen innerhalb der δ -Umgebung eine eindeutig bestimmte, ganz in U liegende Lösung des A.W.P. gibt.

Satz 2.2 (1.4.5) Sei D ein Gebiet in $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$, wobei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} ist. Die Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei stetig und Lipschitz stetig bzgl. der zweiten Variablen im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und holomorph im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I sei eine relativ kompakte, konvexe, offene Teilmenge von \mathbb{K} und $\phi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei eine Lösung des A.W.P. $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$, wobei der Graph $G_\phi := \{(t, \phi(t)); t \in I\}$ von ϕ relativ kompakt in D ist.

$U \subset D$ sei eine relativ kompakte, offene Umgebung der abgeschlossenen Hülle \bar{G}_ϕ von G_ϕ .

Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\bar{U}_\delta(t_0) \times \bar{U}_\delta(x_0) \subset U$ und für alle $(t_1, x_1) \in U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$ stets genau eine Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des A.W.P. $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$ existiert, deren Graph $G_\psi := \{(t, \psi(t)); t \in I\}$ in U enthalten ist. Ferner gilt

$$\|\psi(t) - \phi(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|) e^{L|t-t_1|}$$

für alle $t \in I$, wobei L eine Lipschitzkonstante der Beschränkung $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{K}^n$ und $M := \max\{\|f(t, x)\|; (t, x) \in \bar{U}\}$ ist.

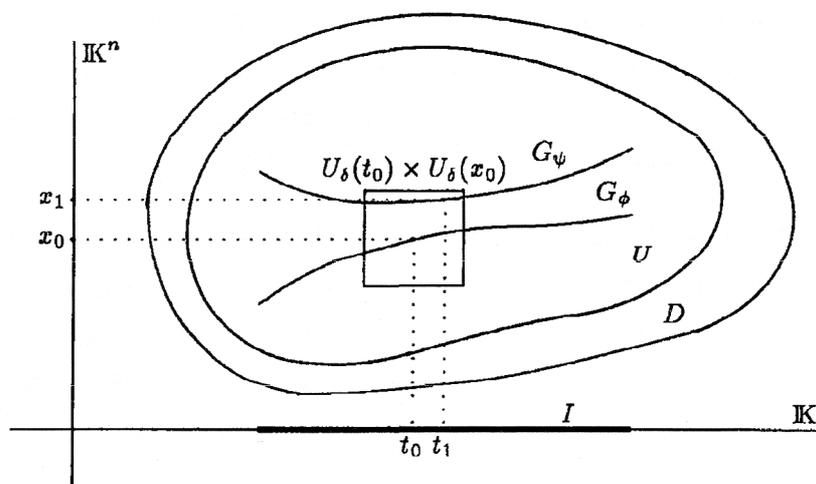


Abbildung 2: Variation der Anfangsbedingungen

Beweis: Nach Voraussetzung ist die Distanz

$$\varepsilon := \min\{|t - \tilde{t}| + \|x - \tilde{x}\|; (t, x) \in \bar{G}_\phi, (\tilde{t}, \tilde{x}) \in \partial U\}$$

zwischen \bar{G}_ϕ und dem Rand ∂U von U positiv. Sei $\delta > 0$, so dass $\bar{U}_\delta(t_0) \times \bar{U}_\delta(x_0) \subset U$ und $\delta(1 + M)e^{Ld} \leq \varepsilon$. Dabei ist $d := \max\{|t - \tilde{t}|; t, \tilde{t} \in \bar{I}\}$ der Durchmesser der kompakten Menge \bar{I} .

Man kann nun zeigen, dass es für $(t_1, x_1) \in U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$ stets eine Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des A.W.P. $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$ gibt, so dass der Graph G_ψ ganz in U verläuft.

$I_s := \{t_1 + s(t - t_1); t \in I\}$, $0 < s \leq 1$ sind offene, konvexe Teilmengen von I . Für genügend kleines $s \in]0, 1]$ gibt es sicher eine lokale Lösung $\psi_s : I_s \rightarrow \mathbb{K}^n$ des obigen A.W.P., deren Graph ganz in U liegt. Sei $s_0 \in]0, 1]$ das Supremum aller dieser s .

Angenommen, es gilt $s_0 < 1$. Für $t \in I_{s_0}$ ist dann wegen Satz 1.4.4

$$\|\psi_{s_0}(t) - \phi(t)\| \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|)e^{L|t_1 - t|} < \delta(1 + M)e^{Ls_0d} =: \varepsilon_{s_0} < \varepsilon$$

d.h., die Distanz zwischen $(t, \psi_{s_0}(t)) \in G_{\psi_{s_0}}$ und $(t, \phi(t)) \in G_\phi$ ist kleiner als $\varepsilon_{s_0} < \varepsilon$ und somit ist $G_{\psi_{s_0}}$ relativ kompakt in U . Die Lösung ψ_{s_0} lässt sich nun zu einer Lösung $\psi_{s_1} : I_{s_1} \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit $s_0 < s_1 \leq 1$ fortsetzen, deren Graph ganz in U liegt, im Widerspruch zur Wahl von s_0 . Es muss also $s_0 = 1$ sein, und damit ist $\psi := \psi_1 : I_1 = I \rightarrow \mathbb{K}^n$ die gesuchte Lösung mit $G_\psi \subset U$. Aus Satz 1.4.4 folgt die behauptete Ungleichung für $\|\psi(t) - \phi(t)\|$, $t \in I$.

2.3 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten

Für reelle Systeme von Differentialgleichungen $x' = f(t, x)$, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und bezüglich der zweiten Variablen Lipschitz-stetige Funktion auf einem Gebiet D in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ist, kann gezeigt werden, dass die Lösungen stetig von den Anfangswerten abhängen.

Bezeichnung:

$$\Delta := \{(t, t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; (t_0, x_0) \in D, t \in I(t_0, x_0)\}$$

$$x : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$$

wobei $x(-, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ die maximale Lösung des A.W.P. $x' = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ ist.

Satz 2.3 (1.4.8) Δ ist offen und $x : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Beweis: Sei $(t^*, t_0, x_0) \in \Delta$, d.h., $(t_0, x_0) \in D, t^* \in I(t_0, x_0)$. Wählt man nun ein offenes Intervall I , das relativ kompakt in $I(t_0, x_0)$ liegt und sowohl t_0 als auch t^* enthält, und bezeichnet $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Einschränkung der maximalen Lösung $x(-, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf I , dann ist der Graph G_ϕ relativ kompakt in D . Wählt man weiters eine offene, relativ kompakte Umgebung $U \subset D$ von \bar{G}_ϕ und dazu ein $\delta > 0$ wie in Satz 1.4.5, dann ist $I \subset I(t_1, x_1)$ für alle $(t_1, x_1) \in U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$. Ohne weiteres kann angenommen werden, dass $U_\delta(t^*) \subset I$ gilt. Dann ist

$$U_\delta(t^*) \times U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0) \subset \Delta$$

d.h., Δ ist offen.

Auf Grund von Satz 1.4.5 gilt für $(t, t_1, x_1) \in U_\delta(t^*) \times U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$

$$\begin{aligned} & \|x(t, t_1, x_1) - x(t^*, t_0, x_0)\| \\ & \leq \|x(t, t_1, x_1) - x(t, t_0, x_0)\| + \|x(t, t_0, x_0) - x(t^*, t_0, x_0)\| \\ & \leq (\|x_1 - x_0\| + M|t_1 - t_0|)e^{Ld} + M|t - t^*| \end{aligned}$$

Dabei sind L, M und d wie in Satz 1.4.5 bzw. dem zugehörigen Beweis bestimmt. Damit ist gezeigt, dass x im Punkt (t^*, t_0, x_0) stetig ist.

3 Komplexe dynamische Systeme

3.1 Lemma von Gronwall

Für die Beweise der Sätze zur stetigen Abhängigkeit der Lösungen eines **komplexen** dynamischen Systems von den Anfangswerten wird eine komplexe Version des Lemmas von Gronwall benötigt.

Lemma 3.1 Sei G ein konvexes Gebiet in \mathbb{C} und $c \in G$. Die Funktion $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig mit $u(t) \geq 0$ für alle $t \in G$. Wenn es reelle Konstanten $C \geq 0$ und $K \geq 0$ gibt, so dass

$$u(t) \leq C + K \left| \int_c^t u(s) ds \right|$$

für alle $t \in G$ (wobei über die Verbindungsstrecke von c nach t in G integriert wird), dann gilt für alle $t \in G$:

$$u(t) \leq Ce^{K|t-c|}$$

Beweis: Die Verbindungsstrecke von c nach t in G wird parametrisiert durch $s = c + e^{i\alpha}\sigma$, $\sigma \in [0, |t-c|]$, wobei $\alpha := \arg(t-c)$. Sei $w : [0, |t-c|] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$w(\sigma) := u(c + e^{i\alpha}\sigma)$$

dann gilt

$$\begin{aligned} w(|t-c|) &= u(c + e^{i\alpha}|t-c|) = u(t) \leq C + K \left| \int_c^t u(s) ds \right| \\ &= C + K \left| \int_0^{|t-c|} u(c + e^{i\alpha}\sigma) e^{i\alpha} d\sigma \right| \\ &\leq C + K \int_0^{|t-c|} u(c + e^{i\alpha}\sigma) d\sigma = C + K \int_0^{|t-c|} w(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

Aufgrund von Lemma 2.1 auf Seite 3 folgt hieraus

$$u(t) = w(|t-c|) \leq Ce^{K|t-c|}$$

3.2 Differenz von Lösungen mit unterschiedlichen Anfangswerten

Die Sätze 2.1 auf Seite 4 und 2.2 auf Seite 5 können – unter Zuhilfenahme des Lemmas von Gronwall in seiner komplexen Form – ungeändert auf komplexe Differentialgleichungen übertragen werden. Zu beachten ist dabei nur, dass die Funktionen f , ϕ und ψ holomorph und die Integrale wegen der Konvexität von der relativ kompakten, offenen Teilmenge I von \mathbb{C} wegunabhängig sind. Als Integrationswege können daher stets die Verbindungsstrecken gewählt werden.

3.3 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten

Für holomorphe Differentialgleichungen sind im allgemeinen die maximalen Existenzgebiete von A.W.P. keine Gebiete in \mathbb{C} , sondern Riemannsche Flächen über \mathbb{C} . Daher lässt sich Satz 2.3 auf Seite 7 nicht ohne weiteres ins Komplexe übertragen. Daher wird nur eine lokale Version gezeigt:

Satz 3.1 (1.4.9) Sei D ein Gebiet in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorph und I ein relativ kompaktes, konvexes Gebiet in \mathbb{C} und $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Lösung des A.W.P. $x' = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ für $(t_0, x_0) \in D$, wobei der Graph $G_\phi := \{(t, \phi(t)); t \in I\}$ von ϕ relativ kompakt in D ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

- $U_\delta(t_0) \subset I, U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0) \subset D$,
- zu jedem $(t_1, x_1) \in U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$ gibt es genau eine holomorphe Lösung $\phi(-, t_1, x_1) : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ des A.W.P. $x' = f(t, x)$, $x(t_1) = x_1$
- $\phi : \Delta_{t_0, x_0} := I \times U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist stetig.

Beweis: Sei U eine relativ kompakte, offene Umgebung U von \bar{G}_ϕ in D und $\delta > 0$ wie in Satz 1.4.5. Die ersten beiden Aussagen folgen dann sofort aus Satz 1.4.5. Die Stetigkeit von ϕ ergibt sich ähnlich wie im Beweis von Satz 1.4.8. Für

$$(\tau_1, t_1, x_1), (\tau_2, t_2, x_2) \in \Delta_{t_0, x_0} := I \times U_\delta(t_0) \times U_\delta(x_0)$$

gilt nämlich

$$\begin{aligned} & \|\phi(\tau_1, t_1, x_1) - \phi(\tau_2, t_2, x_2)\| \\ & \leq \|\phi(\tau_1, t_1, x_1) - \phi(\tau_1, t_2, x_2)\| + \|\phi(\tau_1, t_2, x_2) - \phi(\tau_2, t_2, x_2)\| \\ & \leq (\|x_1 - x_2\| + M|t_1 - t_2|)e^{Ld} + M|\tau_1 - \tau_2| \end{aligned}$$

wobei L, M, d wie in Satz 1.4.5 bzw. dessen Beweis bestimmt sind. ϕ ist somit stetig, angenommen sogar Lipschitz stetig auf Δ_{t_0, x_0} . Es kann gezeigt werden, dass ϕ sogar holomorph ist.

4 Systeme linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei I ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{K} , mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder \mathbb{C} (d.h. ein offenes Intervall in \mathbb{R} oder eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, offene Menge in \mathbb{C}).

$\mathbb{K}(\times, \times)$ bezeichne den Vektorraum der $n \times n$ -Matrizen mit Elementen aus \mathbb{K} .

$A : I \rightarrow \mathbb{K}(n, n)$ sei im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ eine stetige und im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung. $D := I \times \mathbb{K}^n$ ist dann ein Gebiet in $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei definiert durch die Zuordnung $f(t, x) := A(t) \circ x$.

Es soll nun das homogene System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$x' = f(t, x) = A(t) \circ x$$

untersucht werden.

Es gilt, dass $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ bzgl. der zweiten Variablen Lipschitz stetig ist, denn für $(t, x), (t, \tilde{x}) \in D$ gilt

$$\|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| = \|A(t) \circ (x - \tilde{x})\| \leq n\|A(t)\| \|x - \tilde{x}\|$$

wobei

$$\| - \| : \mathbb{K}(n, n) \cong \mathbb{K}^{n^2} \rightarrow \mathbb{R}$$

die Maximumsnorm bezeichnet.

Da $n\|A(t)\|$ als stetige Funktion auf I lokal beschränkt ist, gibt es zu jedem Punkt $t_0 \in I$ eine offene Umgebung $V(t_0) \subset I$, so dass die Beschränkung $f : V(t_0) \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ bzgl. der zweiten Variablen gleichmässig Lipschitz stetig ist. $V(t_0)$ kann sogar als beliebige in I relativ kompakte Umgebung von t_0 gewählt werden.

4.1 Existenz und Stetigkeit der globalen Lösung

Nun soll gezeigt werden, dass es zu jedem $t_0 \in I$ und $x_0 \in \mathbb{K}^n$ eine globale Lösung

$$\phi(-, t_0, x_0) : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

des A.W.P. $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ gibt und dass $\phi : \Delta := I \times I \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig ist.

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$:

Angenommen, das maximale Existenzintervall $I(t_0, x_0)$ einer maximalen Lösung $\phi(-, t_0, x_0) : I(t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist echt in I enthalten, z.B. $I(t_0, x_0) =]a, b[$ mit $b \in I$. Dann gilt für $t \in [t_0, b[$ wegen Satz 1.4.4

$$\|\phi(t, t_0, x_0)\| \leq \|x_0\| e^{L(t-t_0)}$$

wobei $L > 0$ eine Lipschitzkonstante von f auf $[t_0, b] \times \mathbb{R}^n$ ist, z.B. das Maximum $n\|A(t)\|$ auf $[t_0, b]$. Also ist der Graph $\{(t, \phi(t, t_0, x_0)); t \in [t_0, b[$ von $\phi(-, t_0, x_0) : [t_0, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ relativ kompakt in $I \times \mathbb{R}^n$. Dem widerspricht die Maximalität von $I(t_0, x_0)$. Also muss $I(t_0, x_0) = I$ sein.

Die Stetigkeit von $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ folgt aus Satz 2.3 auf Seite 7.

Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

Sei $\phi_0 : U_{\delta_0}(t_0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine lokale holomorphe Lösung des A.W.P. $x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$ auf einer offenen Kreisscheibe $U_{\delta_0}(t_0) := \{\tau \in \mathbb{C}; |\tau - t_0| < \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$, die relativ kompakt in I liegt.

Es kann nun gezeigt werden, dass sich die Lösung ϕ_0 in jeden Punkt $t \in I$ zu einer holomorphen Lösung fortsetzen lässt. Hierzu wird eine Kreiskette $U_{\delta_i}(t_i), i = 0, \dots, N$ von offenen Kreisscheiben $U_{\delta_i}(t_i) := \{\tau \in \mathbb{C}; |\tau - t_i| < \delta_i\}$, die relativ kompakt in I liegen, wobei gilt:

- $t_i \in U_{\delta_{i-1}}(t_{i-1})$ für $i = 1, \dots, N$,
- $t_N = t$,
- $U_{\delta_0}(t_0)$ ist wie oben gewählt.

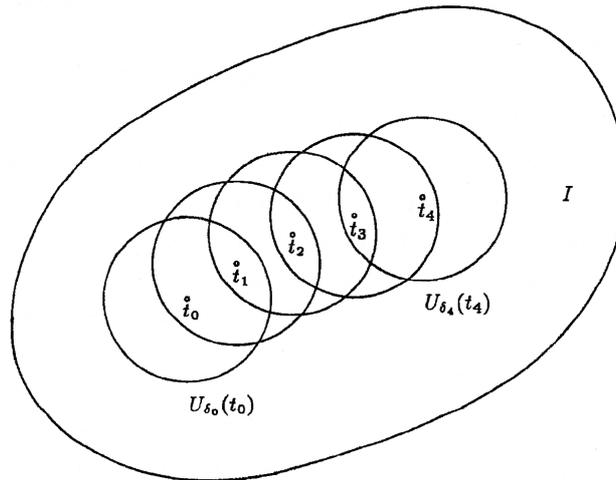


Abbildung 3: Kreiskette

Nun können rekursiv für $i = 1, \dots, N$ wie oben lokale holomorphe Lösungen $\phi_i : U_{\delta_i}(t_i) \rightarrow \mathbb{C}^n$ für das A.W.P. $x' = f(t, x), x_i(t_i) = \phi_{i-1}(t_i)$ bestimmt werden.

Da die Lösungen ϕ_{i-1} und ϕ_i jeweils in t_i den gleichen Wert annehmen, stimmen sie auf $U_{\delta_{i-1}}(t_{i-1}) \cap U_{\delta_i}(t_i)$ überein. $\phi_N : U_{\delta_N}(t) \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist folglich eine holomorphe Fortsetzung der zu Beginn gewählten Lösung $\phi_0 : U_{\delta_0}(t_0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\phi(t_0) = x_0$. Da I einfach zusammenhängend vorausgesetzt wurde, ist diese holomorphe Fortsetzung eindeutig und ergibt die gesuchte Lösung $\phi(-, t_0, x_0) \rightarrow \mathbb{C}^n$ des obigen A.W.P.

Schließlich soll noch die Stetigkeit von $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^n$ mit $\Delta := I \times I \times \mathbb{C}^n$ gezeigt werden.

Aus Satz 3.1 auf Seite 9 folgt bereits, dass für alle $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ die Einschränkungen $\varphi_i : U_{\delta_i}(t_i) \times U_{\delta_i}(t_i) \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ von ϕ stetig sind, wenn die Umgebungen $U_{\delta_i}(t_i)$ eine Kreiskette mit $t_N = t$ bilden.

Als nächstes soll nun die Stetigkeit von ϕ auf der Umgebung $U_{\delta_N}(t) \times U_{\delta_0}(t_0) \times \mathbb{C}^n$ von $(t, t_0, x_0) \in I \times I \times \mathbb{C}^n$ gezeigt werden.

Durch das Rekursionsschema

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \phi_0(t_1, \tau_0, y_0) \\
 y_2 &= \phi_1(t_2, t_1, y_1) \\
 &\vdots \\
 y_N &= \phi_{N-1}(t_N, t_{N-1}, y_{N-1})
 \end{aligned}$$

erhält man eine stetige Funktion $y_N = \psi(\tau_0, y_0)$ auf $U_{\delta_0}(t_0) \times \mathbb{C}^n$.

Behauptung: Für $(\tau, \tau_0, y_0) \in U_{\delta_N}(t) \times U_{\delta_0}(t_0) \times \mathbb{C}^n$ gilt

$$\phi(\tau, \tau_0, y_0) = \varphi_N(\tau, t_N, y_N) = \varphi(\tau, t_N, \psi(\tau_0, y_0)) \quad (*)$$

Als Komposition stetiger Funktionen ist somit $\phi(\tau, \tau_0, y_0)$ stetig.

Beweis: Die Gleichung (*) ergibt sich auf folgende Weise: $\varphi(-, t_1, y_1)$ und $\varphi_0(-, \tau_0, y_0) = \phi(-, \tau_0, y_0)$ nehmen für t_1 beide den Wert y_1 an. Daraus folgt wegen des Eindeutigkeitsatzes

$$y_2 = \varphi_1(t_2, t_1, y_1) = \phi(t_2, \tau_0, y_0)$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} y_3 &= \varphi_2(t_3, t_2, y_2) = \phi(t_3, \tau_0, y_0) \\ &\vdots \\ y_N &= \varphi_{N-1}(t_N, t_{N-1}, y_{N-1}) = \phi(t_N, \tau_0, y_0) \end{aligned}$$

$\varphi_N(-, t_N, y_N)$ und $\varphi_{N-1}(-, t_{N-1}, y_{N-1}) = \phi(-, \tau_0, y_0)$ nehmen für t_N beide den Wert y_N an. Daraus folgt schließlich die Behauptung.

q.e.d.

Auf die Voraussetzung, dass I einfach zusammenhängend ist, kann nicht verzichtet werden, da sonst im allgemeinen globale Lösungen von $x' = A(t) \circ x$ nur auf Riemannflächen existieren, die I unverzweigt überlagert sind.

4.2 Lösungsraum eines homogenen linearen Systems

Die globalen Lösungen $\phi : I \rightarrow \mathbb{C}^n$ von $x' = A(t) \circ x$ bilden einen n -dimensionalen Vektorraum L_{hom} über \mathbb{K} , wobei die Zuordnung $\mathbb{K}^n \ni x_0 \mapsto \phi(-, t_0, x_0) \in L_{hom}$ bei festem $t_0 \in I$ einen Vektorraumisomorphismus darstellt.

$\{\phi_\nu := \phi(-, t_0, e_\nu); \nu = 1, \dots, n\}$ ist eine Basis von L_{hom} , wobei $\{e_1, \dots, e_n\}$ die Standardbasis von \mathbb{K}^n bezeichnet. Für $t \in I$ erhält man mittels der Definition

$$\phi(t) := (\phi_1(t) \cdots \phi_n(t)) \in \mathbb{K}(n, n)$$

eine differenzierbare bzw. holomorphe Abbildung

$$\phi : I \rightarrow \mathbb{K}(n, n)$$

$\det(\phi(t))$ heisst Wronski-Determinante von ϕ_1, \dots, ϕ_n . Da $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ linear unabhängig sind, gilt $\det(\phi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$.

(Bemerkung: $\det(\phi(t_0)) = \det(e_1 \cdots e_n) = 1$.)

4.3 Lösungsraum eines inhomogenen linearen Systems

Ist $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ eine stetige ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. holomorphe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Abbildung, so heisst

$$x' = A(t) \circ x + B(t)$$

ein inhomogenes System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Es ist unmittelbar klar, dass $A(t) \circ x + B(t)$ Lipschitz-stetig in x ist:

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, \tilde{x})\| &= \|A(t) \circ x + B(t) - (A(t) \circ \tilde{x} + B(t))\| \\ &= \|A(t) \circ (x - \tilde{x})\| \leq n \|A(t)\| \|x - \tilde{x}\| \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Methode der Variation der Konstanten kann man versuchen, eine spezielle Lösung $\phi_0 : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ des inhomogenen Systems zu bestimmen

$$\phi_0(t) := \sum_{\nu=1}^n C_\nu(t) \phi_\nu(t)$$

wobei $C_\nu : I \rightarrow \mathbb{K}, \nu = 1, \dots, n$ stetig differenzierbare bzw. holomorphe Koeffizienten sind.

Durch Einsetzen von $\phi_0(t)$ in die Gleichung $x' = A(t) \circ x + B(t)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \phi_0'(t) &= \sum_{\nu=1}^n C_\nu'(t) \phi_\nu(t) + \sum_{\nu=1}^n C_\nu(t) \phi_\nu'(t) \\ &= \phi(t) \circ C'(t) + \sum_{\nu=1}^n A(t) \circ \phi_\nu(t) \\ A(t) \circ \phi_0(t) + B(t) &= \sum_{\nu=1}^n C_\nu(t) A(t) \circ \phi_\nu(t) + B(t) \end{aligned}$$

Als Bestimmungsgleichungen ergeben sich daraus

$$\begin{aligned} \phi(t) \circ C'(t) = B(t) &\Leftrightarrow C'(t) = \phi^{-1}(t) \circ B(t) \\ &\Leftrightarrow C(t) = \int_{t_0}^t \phi^{-1}(\tau) \circ B(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Hat man auf diese Weise eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems gefunden, so ist der Raum L_{inhom} aller Lösungen des inhomogenen Systems gegeben durch

$$L_{inhom} = \phi_0 + L_{hom} := \{\phi_0 + \phi; \phi \in L_{hom}\}$$

5 Differenz von Lösungen verschiedener DGLn bei gleichen Anfangswerten

Satz 5.1 (1.4.11) Sei D offen in $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und gleichmässig Lipschitz stetig bzgl. der zweiten Variablen mit einer Lipschitzkonstanten $L > 0$.

$g : D \rightarrow \mathbb{K}^n$ sei eine stetige Abbildung mit

$$\|f(t, x) - g(t, x)\| < \varepsilon$$

für alle $(t, x) \in D$.

Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ seien f und g zusätzlich als holomorph vorausgesetzt.

Sind $\phi, \psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ holomorphe Lösungen von $x' = f(t, x)$ bzw. $y' = g(t, y)$ auf einem konvexen Gebiet I in \mathbb{K} mit $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, dann gilt für alle $t \in I$:

$$|\phi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

Beweis: Für $t \in I$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \phi(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau \\ \psi(t) &= \psi(t_0) + \int_{t_0}^t g(\tau, \psi(\tau)) d\tau\end{aligned}$$

Dabei wird über die Verbindungsstrecke von t_0 nach t integriert. Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\|\phi(t) - \psi(t)\| &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \phi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|f(\tau, \phi(\tau)) - f(\tau, \psi(\tau))\| + \|f(\tau, \psi(\tau)) - g(\tau, \psi(\tau))\| d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (L\|\phi(\tau) - \psi(\tau)\| + \varepsilon) d\tau \right| \\ &= L \left| \int_{t_0}^t (\|\phi(\tau) - \psi(\tau)\| + \frac{\varepsilon}{L}) d\tau \right|\end{aligned}$$

Mit $u(t) := \|\phi(t) - \psi(t)\| + \frac{\varepsilon}{L}$ gilt $u(t) \leq \frac{\varepsilon}{L} + L \left| \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau \right|$ für alle $t \in I$. Mit dem Lemma von Gronwall ergibt sich somit für alle $t \in I$

$$u(t) \leq \frac{\varepsilon}{L} e^{L|t-t_0|} \quad \Leftrightarrow \quad \|\phi(t) - \psi(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{L}(e^{L|t-t_0|} - 1)$$

Bemerkung: Dieser Satz lässt sich insbesondere anwenden auf Differentialgleichungen $x' = f(t, x, \tau)$, in denen die rechte Seite stetig von einem Parameter τ aus einem Gebiet $W \subset \mathbb{K}^n$ abhängt. An die Stelle von $f(t, x)$ und $g(t, x)$ treten in dem Fall $f(t, x, \tau_1)$ und $f(t, x, \tau_2)$ für feste τ_1, τ_2 aus W .

Beispiel: Für $\tau \in]-1, 1[$ sei $f_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f_\tau(x) := 1 + (\tau x)^2$. Es gilt dann für alle $x \in D := \{r \in \mathbb{R}; |r| < 1\}$:

$$|f_\tau(x) - f_0(x)| = \tau^2 x^2 \leq \tau^2$$

$f_0(x) \equiv 1$ ist gleichmäßig Lipschitz-stetig auf D , wobei jedes $L > 0$ als Lipschitzkonstante gewählt werden kann.

Das A.W.P. $x' = f_\tau(x), x(0) = 0$ hat die Lösungen $x_\tau :]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[\rightarrow D$, definiert durch

$$x_\tau(t) := \begin{cases} \frac{1}{\tau} \tan(\tau t), & \text{falls } \tau \neq 0 \\ t, & \text{falls } \tau = 0 \end{cases}$$

wie man durch Einsetzen leicht verifiziert:

$$\frac{1}{\cos^2(\tau t)} = 1 + \tan^2(\tau t) = \frac{\cos^2(\tau t)}{\cos^2(\tau t)} + \frac{\sin^2(\tau t)}{\cos^2(\tau t)}$$

bzw.

$$1 = 1$$

Aus vorangehendem Satz erhält man für $\tau \in]-1, 1[, t \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$:

$$|x_\tau(t) - x_0(t)| \leq \frac{\tau^2}{L} (e^{L|t|} - 1)$$

Da $L > 0$ beliebig klein gewählt werden kann, folgt daraus wegen

$$e^{L|t|} = 1 + L|t| + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(L|t|)^n}{n!}$$

$$|x_\tau(t) - x_0(t)| \leq \tau^2 |t| \leq \tau^2 \frac{\pi}{4}$$

Somit konvergiert x_τ auf $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ für $\tau \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen x_0 .

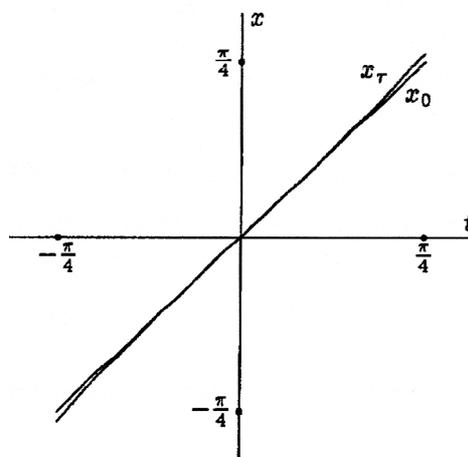


Abbildung 4: Lösungen x_0 und x_τ für $\tau = \frac{1}{2}$