Prüfungsprotokoll
Kurs: Lineare Algebra II (01103)
Datum: 24.07.2006, 10:00 Uhr, Dauer: ca. 26 min
Prüferin: Prof. Dr. Unger
Beisitzer: J. Liedtke
Note: 1,0

Bei Prof. Dr. Unger hat man die Möglichkeit, mit einem bestimmten Thema anzufangen. Ich habe mir das charakteristische Polynom (KE 1) ausgesucht.

KE 1:

- **F: Ich gebe Ihnen eine Matrix (a_{ij}) vor, was ist das charakteristische Polynom und warum interessiert es uns eigentlich?**
  A: $det(T \cdot I_n - A)$, Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix
- **F: Was ist ein Eigenwert, was ist ein Eigenvektor?**
  A: Definition gegeben, erklärt, dass man bei der Endomorphismen-Schreibweise sehr schön sieht, dass f den Vektor u lediglich um den Faktor λ streckt bzw. staucht. Definition in Matrixschreibweise gegeben.
- **F: Warum interessieren uns denn die Eigenwerte einer Matrix noch?**
  A: Falls es eine Basis von V aus Eigenvektoren gibt, kann ich die Matrixdarstellung nur mit diesen Vektoren konstruieren, da $f(u) = \lambda \cdot u$ ist ,sind die Eigenwerte dann genau die Diagonaleinträge der resultierenden Diagonalmatrix.
- **F: Es gibt ja noch ein weiteres Polynom, das für uns von Interesse ist, welches Polynom ist das?**
  A: Minimalpolynom, Definition gegeben.
- **F: Wie hängen das charakteristische und das Minimalpolynom zusammen?**
  A: Gleiche irreduzible Faktoren, Satz von Cayley-Hamilton, μ_A teilt χ_A, χ_A teilt $(\mu_A)^n$

KE 2:

- **F: Sie haben bereits eine Bedingung für die Diagonalisierbarkeit einer Matrix genannt. Welche weiteren zur Diagonalisierbarkeit äquivalenten Aussagen kennen Sie?**
  A: $V = \bigoplus_{i=1}^{n} E(\lambda_i)$, Charakteristische Polynom zerfällt in Linearfaktoren und algebraische VF = geometrische Vielfachheit für alle Eigenwerte und Minimalpolynom zerfällt in Linearfaktoren und die Vielfachheit der Eigenwerte ist gleich 1 (Folgerung aus dem Hauptsatz über die Jordansche Normalform). Habe dabei alle genannten Begriffe erklärt.
- **F: Ist die folgende Matrix diagonalisierbar?**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A: $\chi_a = (T-2)^2$, $A - I_n \cdot 2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
also ist $Kern(A - I_n \cdot 2) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$, die algebraische VF (=2) ist ungleich der geometrischen (=1) und A ist nicht diagonalisierbar.

- **F: Sie hatten bereits kurz die JNF angesprochen, wie würde die JNF für diese Matrix aussehen?**
  A: Auf der Hauptdiagonalen steht jeweils 2 (=einziger Eigenwert)...

- **F: Schreiben Sie doch mal die möglichen JNFen auf.**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- **F: Welche von beiden kann es nicht sein?**
  A: (war an diesem Punkt etwas verwirrt, habe zuerst gesagt, dass die erste Matrix ja als Diagonalmatrix eine besondere JNF darstellt, wusste dann aber nicht weiter und wollte die Rangpartition bestimmen, um auf die nilpotente NF zum Eigenwert 2 zu kommen. Prof. Unger hat mir dann die Antwort erklärt)

- **A(Unger): Sie haben ja gerade richtig gezeigt, dass A nicht diagonalisierbar ist, dann kann ja die erste Matrix nicht die JNF zu A darstellen und es muss die zweite sein.**
  (wenn ich mich recht erinnern kann habe ich fast genau diese Rechenaufgabe beim Besuch einer LA2-Prüfung einer Kommilitonin gesehen. Anscheinend nimmt Prof. Unger dieses Beispiel sehr gerne, weil man so Diagonalisierbarkeit und JNF miteinander verknüpfen kann. Es lohnt sich also, sich dieses Beispiel vorher mal gut anzuschauen, schwer ist es ja wirklich nicht, nur man muss in der Situation flott drauf kommen.)

- **F: Wir haben uns ja neben den diagonalisierbaren Matrizen auch nilpotente Matrizen angeschaut, was ist denn eine nilpotente Matrix?**
  A: Definition gegeben

- **F: Man kann am charakteristischen Polynom erkennen, ob die Matrix nilpotent ist. Wie sieht denn das ch. Polynom in diesem Fall aus?**
  A: T^n

- **F: Beweisen Sie dies bitte.**
  A: (Diesen Beweis fragt Prof. Unger anscheinend JEDES MAL.) Eine Richtung: Cayley-Hamilton. Andere Richtung: T^m ist ein Polynom, in das ich A einsetzen kann und erhalte die Nullmatrix....s. KE2

- **F: Wie sieht eine Normalform hierzu aus?**
  A: $N(p)$, Blockdiagonalmatrix, $N(p_k)$, Partition erklärt

- **F: Wie kann ich eine solche Normalform bestimmen?**
  A: Rangpartition bestimmen, dualisieren, NF aufstellen.

KE 3:

- **F: Wie lautet der Hauptsatz über die JNF?**
  A: Minimalpolynom zerfällt in LFen .. es gibt eine Basis B mit einer JNF als Matrixdarstellung zu dieser Basis und zwei JNF sind genau dann ähnlich, wenn sie sich nur durch die Anordnung der Jordanblöcke unterscheiden

- **F: Im Beweis zum Hauptsatz ist eine Implikation leicht, die andere ist schwer. Wie sieht die Leichte aus?**
  A: wenn es eine JNF als Matrixdarstellung gibt, dann zerfällt das Minimalpolynom in LFen (wie im Vorwort zu KE3)

- **F: Aber Sie haben ja dann nur das Charakteristische Polynom für die JNF und nicht für eine Matrix A bestimmt.**
  A: Ja, aber A liegt annahmegemäß in der Konjugationsklasse der JNF, die Matrizen sind also ähnlich und ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische bzw. Minimalpolynom.

- **F: Wie sieht die schwere Beweisrichtung aus?**
  A: Wie im Vorwort zu KE3 die Beweisidee erzählt mit einigen Details (hier kann man glaube ich echt einige Minuten gewinnen, indem man kleine Details nennt... z.B. habe ich erwähnt, dass ich die Matrixdarstellungen der Einschränkungen von f auf die verallgemeinerten Eigenräume wie f aufspalten kann in einen diagonalisierbaren und einen nilpotenten Teil, der erste Teil $id_V * \lambda_i$ ist und der nilpotente Teil $f - id_v \cdot \lambda_i$ und ich nun jeweils eine Basis B_i des verallgemeinerten Eigenraumes so wählen muss, dass der nilpotente Teil die nilpotente NF zu einer Partition der algebraischen VF von λ_i wird und diese Wahl der Basis die Matrixdarstellung des diagonalisierbaren Teils nicht verändert, da diese ja aus der Identität auf V besteht).

Ende der Prüfung

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung: Wie bereits aus allen anderen Protokollen zu LA1 und LA2 hervorgeht ist Prof. Unger wirklich uneingeschränkt als Prüferin zu empfehlen. Ich hatte bei der Rechenaufgabe zur JNF Schwächen und hatte erwartet, dass sich dies auch in der Note bemerkbar machen würde. Mein Aussetzer hatte aber im Endeffekt keinen Einfluss auf die Note. Ich bin an vielen Stellen zwischen der Endomorphismen- und der Matrix-Schreibweise hin und hergesprungen oder habe teilweise beide angegeben. Bin dadurch ein paar Mal durcheinander gekommen und habe mich sprachlich verhaspelt, was ich dann gleich wieder korrigiert habe. Dies zusammen mit der Rechenaufgabe, bei der ich ziemlich ins Grübeln kam und der Beweisskizze der JNF hat wohl dazu geführt, dass bei mir nur KE 1 bis 3 dran kamen! Es kamen noch nicht mal kleine Fragen zu den übrigen Kurseinheiten...