Prüfungsprotokoll
Kurs: Lineare Algebra I (01102)
Datum: 24.04.2006, 10:50 Uhr, Dauer: ca. 25 min
Prüferin: Prof. Dr. Unger
Beisitzer: J. Liedtke
Note: 1,0

Bei Prof. Dr. Unger hat man die Möglichkeit, mit einem bestimmten Thema anzufangen. Ich habe mir Determinanten ausgesucht.

Determinanten:

- Definition der Determinante einer Matrix
- Was ist S_n, Permutation, Signatur, Fehlstand?
- Was für Spezialfälle der Berechnung von det(A) gibt es? (habe da alles aufgezählt, 2x2-, 3x3-Matrizen, Transponierte, Inverse, Nullzeile/-spalte, zwei gleiche Zeilen/Spalten, Dreiecksmatrizen).
- Was macht man denn bei Matrizen, die keinen Sonderfall darstellen? (Gauß- Algorithmus bei Matrizen über Körpern, Matrix auf Dreiecksform bringen)
- Worauf muss man denn achten bei der Determinantenbestimmung durch den Gauß- Algorithmus? (Determinanten der Elementarmatrizen erklärt, Determinantenmultiplikationssatz)
- Und wenn die Matrix über einem kommutativen Ring definiert ist? (Laplace)
- Woraus folgt denn der Laplacesche Entwicklungssatz? (Adjunktensatz)
- Was folgt denn noch so aus dem Adjunktensatz? (Cramer-Regel erklärt)
- Eine weitere Folgerung? (A invertierbar .. det (A) invertierbar; Berechnungsformel für die Inverse von A)
- Wie sehen die Einheitengruppen von Z, Z/mZ, K aus?

Themenwechsel

Vektorräume und lineare Abbildungen:

- Sei V ein Vektorraum, $v_1,\dots,v_n$ Vektoren in V.
- Wann sind die Vektoren lin. unabhängig?
- Wann bilden sie ein Erzeugendensystem?
- Was ist die Dimension eines Vektorraumes?

- Warum besitzen zwei Basen eines Vektorraums die gleiche Basis? (Korollar aus dem Satz von Steinitz)
- Wie lautet das Austauschlemma?
- Nennen Sie alle Dimensionsformeln, die sie kennen!
  - $dim(U) \leq dim(V)$
  - $dim(V/U) = dim(V) - dim(U)$ (dabei erklärt, was V/U ist)
  - $dim(V) = dim(V^*)$
  - $dim(U+W) = dim(U) - dim(W) - dim(U \cap W)$ (gesagt, dass $U \cap W$, U, W, $U+W$ alle Unterräume von V sind)
  - $dim(Hom(V,W)) = dim(W) \cdot dim(V)$
- Wie sind denn die Nebenklassen definiert?
- Wie addiere ich zwei Nebenklassen?
- Wann sind zwei Nebenklassen gleich?
- Weitere Dimensionsformeln,... Stichwort Rangsatz?
  - $dim(V/Kern(f)) = dim(Bild(f))$ f linear
  - $dim(V) = dim(Kern(f)) + dim(Bild(f))$
- Beweisskizzen für folgende zwei Dimensionsformeln:
  - $dim(U+W) = dim(U) - dim(W) - dim(U \cap W)$... (jeweils Basen ergänzen wie im Skript)
  - $dim(Hom(V,W)) = dim(W) \cdot dim(V)$... Isomorphismus zu mxn-Matrizen
- Wie würden Sie beweisen, dass $U \cap W$ ein Vektorraum ist? (Unterraumkriterium: gaaanz ganz simpel skizziert, also Nullvektor ist in U und in W, also auch in $U \cap W$; und dann müsste man zeigen, dass die Schnittmenge gegenüber der Vektoraddition und der Sklalarmultiplikation abgeschlossen ist. Mehr wollte sie nicht hören)
- Sie haben gesagt, die Matrixdarstellung einer linearen Abbildung ist ein Isomorphismus, wie konstruiere ich denn eine Matrixdarstellung? (Bilder der Basisvektoren von V als Linearkombination der Basisvektoren von W darstellen)
- Was kann man allgemein über die Bilder einer Basis von V unter einer linearen Abbildung sagen? (Erzeugendensystem von $Bild(f)$, lin. unab. falls f injektiv, Basis von $Bild(f)$ falls f injektiv und Basis von W falls f bijektiv) Ende der Prüfung.

Allgemeiner Eindruck und Ablauf der Prüfung:
Frau Unger ist sehr sehr freundlich und ihre lockere Art wirkt sehr beruhigend auf den Prüfling. Die Fragen, die sie gestellt hat, decken sich fast zu 100 Prozent mit denen aus den anderen Prüfungsprotokollen. Ich hatte mir vor meiner Prüfung eine Prüfung bei Frau Unger in linearer Algebra I und II angeschaut und war auf das hohe Tempo einer solchen Prüfung schon vorbereitet. Für mich war dies die erste mündliche Prüfung seit dem Abitur und ich hatte es mir im Vorfeld als ein wenig langsamer

vorgestellt. Bei der Prüfung sitzt man übrigens mit Frau Unger und dem Beisitzer an einem runden Tisch in ihrem Büro, die Prüfungssituation ist also etwas anders (und entspannter) als z.B. beim Abitur oder irgendwelchen Staatsexamina, bei denen man vor dem Prüfern sitzt und redet. Auf dem Tisch liegt Schmierpapier, auf dem abwechselnd Frau Unger und der Prüfling rumkritzeln. Wichtige Sachen wie z.B. Beweise/Definitionen habe ich alle auf das Konzeptpapier geschrieben, es reichten jedoch immer Skizzen der Beweise aus. Vor meiner Prüfung habe ich mir die anderen Protokolle genau angeschaut und konnte so viele Kleinigkeiten, auf die sie jedes Mal zu Sprechen kommt, im Vorbeigehen dazusagen (z.B. gegen welche Vektoren darf ich im Austauschlemma den Vektor austauschen, Cramer-Regel unpraktisch wegen der vielen Determinanten etc.). Aus diesen Gründen kann ich Frau Unger als Prüferin bestens empfehlen!