UNENDLICH FERNE PUNKTE AUF FERMAT-KURVEN

DIPLOMARBEIT

vorgelegt am FB Mathematik u. Informatik der FernUniversität -GHS- Hagen

INHALTSVERZEICHNIS

0. EINLEITUNG

Sei $N \in \mathbb{N}$. Die affinen Fermat-Kurven $F_A(N) \subset \mathbb{C}^2$ vom Grad N werden definiert durch

$$F_A(N) := \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 \; / \; X^N + Y^N = 1\} \; .$$

Dann sind die projektiven Fermat-Kurven $F(N) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ vom Grad N gegeben durch

$$F(N) := \{(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) / X^N + Y^N = Z^N\} \; .$$

Nun gilt für $P := (s : t : u) \in F(N)$ und $F(X,Y,Z) := X^N + Y^N - Z^N$:

$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = N \cdot s^{N-1}$,

$\frac{\partial F}{\partial Y}(P) = N \cdot t^{N-1}$ und

$\frac{\partial F}{\partial Z}(P) = N \cdot u^{N-1}$.

Da $P = (s : t : u)$ genau dann singulär ist, wenn

$$\frac{\partial F}{\partial X}(P) = \frac{\partial F}{\partial Y}(P) = \frac{\partial F}{\partial Z}(P) = 0$$

gilt, ist $F(N)$ wegen $(0 : 0 : 0) \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ singuläritätenfrei.
Es gibt weiterhin genau $3N$ Punkte $(X : Y : Z)$ auf $F(N)$, wobei eine Koordinate der X, Y, Z Null ist, nämlich

$$(0 : \xi^j : 1) \; , \; (\xi^j : 0 : 1) \; , \; (\varepsilon \, \xi^j : 1 : 0)$$

mit $\xi := e^{2\pi i/N}$, $\varepsilon := e^{\pi i/N}$ und $0 \leq j \leq N-1$.
Diese Punkte heißen die unendlich fernen Punkte auf $F(N)$.

Bevor nun weitere Ergebnisse und Sprechweisen festgehalten werden, zuerst die bekannte

Definition (1.1):

Sei X eine Riemannsche Fläche. Ein Divisor auf X ist eine Abbildung $D : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, daß zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ nur endliche viele Punkte $x \in K$ existieren mit $D(x) \neq 0$.

Bemerkung (1.2):

Bezüglich der Addition bildet die Menge aller Divisoren auf X eine abelsche Gruppe, die mit $\mathcal{D}$ bezeichnet werde.

Sei nun und im folgenden $N > 2$ und $\mathcal{D}^\circ$ die Gruppe aller Divisoren $\sum\limits_{P \in F(N)} m_p\, P$, $m_p \in \mathbb{Z}$ vom Grad Null auf $F(N)$, d.h. aller Divisoren obiger Form mit $\sum\limits_{P \in F(N)} m_p = 0$. Man beachte, daß wegen der Kompaktheit von $F(N)$ nur endlich viele m_p von Null verschieden sein können.
Bezeichnet man weiterhin die Menge der Hauptdivisoren mit $\mathcal{F}$, so gilt $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}^\circ$, und die Faktorgruppe $\mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}$ heißt die Divisorenklassengruppe von $F(N)$.
Bekanntlich ist der Träger supp D eines Divisors die abgeschlossene Hülle der Menge $\{x \in X \ / \ D(x) \neq 0\}$.
Nun definiert man:
$\mathcal{D}^\infty := \{D \in \mathcal{D}/\mathrm{supp}\ \ D \subset F^\infty(N)\}$, wobei $F^\infty(N)$ die Menge der unendlich fernen Punkte auf $F(N)$ ist.
Offensichtlich ist $\mathcal{D}^\infty$ Untergruppe von $\mathcal{D}$.
$\mathcal{F}^\infty$ wird definiert durch
$\mathcal{F}^\infty := \{D \in \mathcal{D}^\infty \ /\mathcal{D}$ ist Hauptdivisor auf $F(N)\}$.
Es ist klar, daß $\mathcal{F}^\infty$ Untergruppe von $\mathcal{D}^\infty$ ist.

Nachbemerkung (1.3):

Eine meromorphe Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1$ auf einer kompakten Riemannschen Fläche X definiert in kanonischer Weise einen Divisor
$D = (f)$ auf X mittels

$$D(x) = \begin{cases} -k \,, & \text{falls } f \text{ in } x \in X \text{ einen Pol} \\ & \text{der Ordnung } k \text{ besitzt,} \\ k \,, & \text{falls } f \text{ in } x \in X \text{ eine Nullstelle} \\ & \text{der Ordnung } k \text{ besitzt,} \\ 0 \,, & \text{falls } f(x) \notin \{0, \infty\} \end{cases} \quad .$$

Es ist klar, daß D ein Divisor vom Grad Null ist, denn eine meromorphe Funktion f auf einer kompakten Riemannschen Fläche X besitzt, mit Vielfachheit gezählt, genau so viele Nullstellen wie Polstellen.

Wie schon bemerkt wurde, ist $\mathcal{F}^\infty$ Untergruppe von $\mathcal{D}^\infty$; da aber auch $\mathcal{D}^\infty$ trivialerweise auch Untergruppe von $\mathcal{D}^\circ$ ist, ist $\mathcal{F}^\infty$ Untergruppe von $\mathcal{D}^\circ$. $\mathcal{F}^\infty$ ist abelsch, also Normalteiler; es existieren also die Faktorgruppen $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ bzw. $\mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}^\infty$.
Nun hat man

$$\mathcal{D}^\infty \hookrightarrow \mathcal{D}^\circ \longrightarrow \mathcal{D}^\circ/\mathcal{F} \, .$$

Der Kern dieser Abbildung besteht offenbar aus allen Divisoren $D = (f)$, deren Träger in der Menge aller unendlich fernen Punkte enthalten ist, also $\mathcal{D}^\infty \cap \mathcal{F} = \mathcal{F}^\infty$.
Dann bekommt man eine Injektion von abelschen Gruppen

$$\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty \longrightarrow \mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}$$

Bemerkung zur Gruppe $\mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}$:

Bekanntlich ist $\mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}$ die Picard-Gruppe von $F(N)$. Das Jacobische Umkehrproblem besagt dann im wesentlichen, daß $\mathcal{D}^\circ/\mathcal{F}$ gruppentheoretisch isomorph zu einem komplex $-g-$ dimensionalen Torus ist. Dabei ist g das Geschlecht von $F(N)$ und der Torus ist bis auf Isomorphie gegeben durch die Jacobi-Mannigfaltigkeit $\mathrm{Jac}(F(N))$ von $F(N)$, also $\mathrm{Jac}(F(N)) = \mathbb{C}^g/\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$, wobei $\mathrm{Per}(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ das Periodengitter bezeichnet.

Definition (1.4):

Die Gruppe $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ heißt die Divisorenklassengruppe der unendlich fernen Punkte von $F(N)$.

Es geht nun im folgenden darum $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ explizit zu bestimmen, d.h. bereits bekannte Gruppen anzugeben, zu denen $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ isomorph ist.
Nach Definition von $\mathcal{F}^\infty$ sind die Elemente von $\mathcal{F}^\infty$ gerade die Divisoren D vom Typ $D = (f)$, wobei f meromorph auf $F(N)$ ist und f höchstens in den unendlich fernen Punkten Pole oder Nullstellen besitzt.
Sei $\text{Mer}^\infty(F(N))$ die Menge aller meromorphen Funktionen $f : F(N) \longrightarrow \mathbb{P}^1$, mit:
f besitzt höchstens in den unendlich fernen Punkten Pole oder Nullstellen. Dann bildet $\text{Mer}^\infty(F(N))$ bzgl. der Multiplikation von Funktionen eine abelsche Gruppe.
Weiterhin sei

$$\mathcal{U}^\infty := \text{Mer}^\infty(F(N))/\mathbb{C}^* ,$$

wobei $\mathbb{C}^*$ die Menge aller $\mathbb{C}^*$-wertigen konstanten meromorphen Funktionen ist.

Bemerkung (1.5):

Das Faktorisieren nach $\mathbb{C}^*$ erfolgt deshalb, weil f und $c \cdot f$, $c \in \mathbb{C}^*$, den gleichen Hauptdivisor besitzen, denn es gilt:

$$(cf) = (c) + (f) = (f) \quad \text{und} \quad (c)$$

ist Nulldivisor wegen $c \in \mathbb{C}^*$.

Man hat nun einen Homomorphismus abelscher Gruppen
$\mathcal{S} : \text{Mer}^\infty(F(N)) \longrightarrow \mathcal{F}^\infty$, der nach Definition von $\mathcal{F}^\infty$ surjektiv ist. Ist $f \in \ker \mathcal{S}$, also $(f) = 0$, so ist f eine Funktion aus $\text{Mer}^\infty(F(N))$ ohne Pole. Weil $F(N))$ kompakt ist, ist $f(F(N)) \subset \mathbb{C}$ kompakt. Wäre f nicht konstant, so wäre $f(F(N))$ auch offen. Also ist f konstant. Damit gilt $\ker \mathcal{S} = \mathbb{C}^*$ und man erhält einen Isomorphismus

$$\overline{\mathcal{S}} : \mathcal{U}^\infty \longrightarrow \mathcal{F}^\infty .$$

Bevor nun in 1 gezeigt wird, daß $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ endlich ist, werden nun noch einige vorbereitende Abschnitte zusammengestellt.

Die Divisorenklassengruppe der unendlich fernen Punkte im Fall N $\in \{1,2\}$

Wie schon bemerkt wurde, gilt bei der Berechnung der Gruppe $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ die Generalvoraussetzung $N > 2$; im Fall $N \in \{1,2\}$ ist zwar $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ auch endlich, aber trivial, d.h. $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty = 0$:
Das Geschlecht der N-ten Fermat Kurve ist gegeben durch $g = \frac{(N-1)(N-2)}{2}$, d.h. für $N \in \{1,2\}$ gilt $g = 0$, also sind diese Riemannschen Flächen isomorph (biholomorph äquivalent) zu $\mathbb{P}^1$. Weiterhin impliziert Abel's Theorem jetzt $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty = 0$, denn auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit $g = 0$ ist jeder Divisor vom Grad Null ein Hauptdivisor.

Spezielle Divisoren auf Fermat-Kurven

Eine algebraische Kurve $C \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ kann man als Nullstellenmenge von homogenen Polynomen mit $n+1$ Variablen über dem Körper $\mathbb{C}$ auffassen, so daß der zugehörige Funktionenkörper k_c eine Körpererweiterung mit Transzendenzgrad 1 von $\mathbb{C}$ ist. Dabei charakterisiert k_c die Kurve C in der Weise, daß, bis auf birationale Äquivalenz, C eindeutig durch k_c bestimmt wird. Weiterhin existiert zu jeder Kurve $C \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine kompakte Riemannsche Fläche X und eine holomorphe Abbildung $f : X \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ mit $f(X) = C$, die in den nicht singulären Punkten biholomorph ist; X ist sogar bis auf Isomorphie (biholomorphe Äquivalenz) eindeutig bestimmt. Nach einem Theorem von Chow existiert umgekehrt zu jeder kompakten Riemannschen Fläche X und einer holomorphen Abbildung $F : X \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ eine algebraische Kurve C mit $C = f(X)$; natürlich gibt es noch andere

Möglichkeiten X in einen $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ einzubetten. Ein klassisches Problem ist nun die Berechnung der Picard-Gruppe von X . Allerdings können gewisse Teilmengen $M \subset X$ eine übergeordnete Rolle spielen, so daß sich das Interesse auch auf die Berechnung von "Untergruppen" der Picard-Gruppe richtet; im vorliegenden Fall ist $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ Gegenstand der Untersuchung. Eine weitere Modifikation wäre z.B. die Berechnung der Divisorenklassengruppe der Weierstraß-Punkte von $F(N)$, denn im Fall $g > 1$ sind die unendlich fernen Punkte auch Weierstraß-Punkte, für $g = 3$ sogar genau die Weierstraß-Punkte.

Das Geschlecht

Jede Riemannsche Fläche ist insbesondere eine orientierbare, reell $-2-$ dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die kompakten Riemannschen Flächen sind daher homöomorph zu einer Kugel mit endlich vielen Henkeln; die Anzahl der Henkel ist eine topologische Invariante der Fläche und heißt das (topologische) Geschlecht.

Bemerkung (1.6):

Sei X ein topologischer Raum, der zu einer Kugel mit g Henkeln topologisch äquivalent (homöomorph) ist.
Die Zahl $\chi(X) = 2 - 2g$ heißt die Euler-Charakteristik von X .
Betrachtet man jetzt Kurven in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, so gilt der bekannte

Satz (1.7):

Sei $K \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ eine nichtsinguläre projektive Kurve, die durch ein irreduzibles Polynom $P(X,Y)$ definiert wird. Ist $\deg P = N$, so ist das Geschlecht von K gegeben durch

$$g = \frac{(N-1)(N-2)}{2} \quad .$$

Das Geschlecht einer Riemannschen Fläche erhält man z.B. aus

Satz (1.8) (Riemann-Hurwitzsche Formel):

Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine n-blättrige nicht konstante holomorphe Abbildung zwischen den kompakten Riemannschen Flächen X, Y mit der Gesamtverzweigungsordnung $b = b(f)$. Sei g das Geschlecht von X und g' das Geschlecht von Y . Dann gilt die "Riemann-Hurwitzsche" Formel

$$g = \frac{b}{2} + n(g' - 1) + 1$$

Da jede nicht konstante meromorphe Funktion auf X eine holomorphe Funktion nach $Y = \mathbb{P}^1$ ist, läßt sich also nach der Konstruktion einer n-blättrigen Überlagerungsabbildung sowie der Berechnung der Gesamtverzweigungsordnung die Riemann-Hurwitz-Formel mit $g' = 0$ anwenden.

Für das Polynom $X^N + Y^N = 1$ und der zugehörigen kompakten Riemannschen Fläche soll die Berechnung von g einmal exemplarisch vorgeführt werden.
Es gilt:

$$X^N + Y^N = 1 \iff Y^N = 1 - X^N$$

und aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra

$$X^N - 1 = \prod_{i=1}^{N} (X - \xi_i) ,$$

wobei die ξ_i die N-ten Einheitswurzeln bezeichnen ($i \in \mathbb{N}_N$) . Sei nun weiter $A := \mathbb{C} - \{\xi_i \in \mathbb{C} / \xi_i \text{ ist } N\text{-te Einheitswurzel}\}$ und $a \in A$.

Für $\eta := \prod_{i=1}^{N} (a - \xi_i)$ gilt $\eta \neq 0$, und es gibt genau N Zahlen $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{C}$ mit $b_j^N = \eta$.

Betrachtet man jetzt die kanonische holomorphe Projektion

$$\begin{array}{rccc} f\colon & F(N) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & (X,Y) & \longrightarrow & X \ , \end{array}$$

so liegen über jeden Punkt $a \varepsilon A$ genau N Punkte auf der zum Polynom $X^N + Y^N = 1$ gehörigen kompakten Riemannschen Fläche. Da f eine n-blättrige Überlagerung der Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ ist, gilt für die Vielfachheit $v(f,a)$ von f in a trivialerweise $v(f,a) = 1$.
Diese Punkte $a \in A$ leisten also zur Gesamtverzweigungsordnung

$$b(f) = \sum_{a \in \mathbb{P}^1} b(f,a) = \sum_{a \in \mathbb{P}^1} v(f,a) - 1$$

keinen Beitrag.

Also verzweigt f höchstens über den N-ten Einheitswurzeln ξ_i oder über $\infty \in \mathbb{P}^1$. Sei jetzt $i \in \mathbb{N}_N$ und $a = \xi_i$; dann gilt natürlich $\eta = 0$. $Y^N = 0$ gilt aber nur für $Y = 0$. Welche Punkte $(X,0)$ liegen auf $F(N)$ mit $f(X,0) = \xi_i$? Das ist natürlich nur der eine Punkt $(\xi_i, 0)$.
Nun nimmt die holomorphe Projektion $f : F(N) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ jeden Wert $a \in \mathbb{P}^1$ mit Vielfachheit gerechnet genau N-mal an; dabei heißt mit "Vielfachheit gerechnet"

$$N = \sum_{(x,y) \in f^{-1}(a)} v(f,a) .$$

Für $a = \xi_i$, $|f^{-1}(a) = 1|$ gilt nun $f^{-1}(\xi_i) = (\xi_i, 0)$, also $N = v(f,\xi_i) = v(f,a)$. Diese Punkte liefern also den Beitrag

$$\sum_{i=1}^{N} v(f,\xi_i) - 1 = \sum_{i=1}^{N} (N-1) = N(N-1) .$$

Schließlich muß noch nachgeprüft werden, ob $F(N)$ über ∞ (bzgl. f) verzweigt. Es wird jetzt also die projektive Gleichung $X^N + Y^N = Z^N$ betrachtet, und es stellt sich die Frage: Wann gilt $Z = 0$? Das ist genau dann der Fall wenn $X^N = -1$ gilt, also verzweigt f über ∞ nicht, d.h. es gilt $v(f,\infty) = 1$. Damit liefert $a = \infty$ keinen Beitrag zu
$b(f) = \sum_{a \in \mathbb{P}} (v(f,a) - 1)$; es gilt also $b = N(N-1)$.

Einsetzen in die Riemann-Hurwitzsche Formel ergibt:

$$
\begin{aligned}
g(F(N)) &= \frac{b}{2} + N(g'-1) + 1 \\
&= \frac{b}{2} - N + 1 = \frac{N(N-1)}{2} - N + 1 \\
&= \frac{N(N-1) - 2(N-1)}{2} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2}
\end{aligned}
$$

Überlagerungstheorie

Definition (1.9)

Seien X und Y topologische Räume; $p : Y \longrightarrow X$ heißt Überlagerung: $\Longleftrightarrow$ p ist stetig, offen und diskret.

Ist $y \in Y$ und $x \in X$ und gilt $p(y) = x$, so heißt x Spurpunkt von y und y heißt über x gelegen.

Definition (1.10):

$p : Y \longrightarrow X$, $q : Z \longrightarrow X$ seien Überlagerungen von X .
$f : Y \longrightarrow Z$ heißt spurtreu: $\Longleftrightarrow$ $q \circ f = p$.

Liegt also y über x , so wird y durch f auf ein $z \in Z$ abgebildet, das ebenfalls über y liegt.
Die Situation von Definition (1.10) wird durch folgendes kommutatives Diagramm veranschaulicht

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Z \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Beispiel einer Überlagerung:

Seien X, Y Riemannsche Flächen und sei $p : Y \longrightarrow X$ eine nicht konstante holomorphe Abbildung; dann ist p eine Überlagerung.

Seien nun die Räume X und Y zusätzlich noch lokal-kompakt. Dann heißt eine Überlagerung $f : Y \longrightarrow X$ eigentlich $: \Longleftrightarrow$ $f^{-1}(K)$ ist kompakt in Y für jedes Kompaktum $K \subset X$.

Bemerkung (1.11):

Ist weiterhin Y kompakt, so ist sofort klar, daß f eigentlich ist. Da die projektiven Fermat-Kurven kompakt sind, sind also die holomorphen Funktionen $f : F(N) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eigentlich.

Satz (1.12):

Sind X, Y Riemannsche Flächen und sei $f : X \longrightarrow Y$ eine eigentliche, nicht konstante holomorphe Überlagerung. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß f jeden Wert $c \in Y$ mit Vielfachheit gerechnet genau n-mal annimmt.

Definition (1.13):

Eine Überlagerung p heißt unverzweigt, wenn sie lokal-homöomorph ist. Ist p nicht unverzweigt, so heißt p verzweigt.

Definition (1.14):

Seien X, Y topologische Räume; $p : Y \longrightarrow X$ heißt unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung : $\Longleftrightarrow$.
Jedes $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung $\mathcal{U}$, so daß gilt:

$$p^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{j \in J}} V_j \ ,$$

wobei die $V_j (j \in J)$ paarweise disjunkte offene Teilmengen von Y sind und die Restriktionen $P|V_j \longrightarrow \mathcal{U}$ Homöomorphismen sind.

Definition (1.15):

Seien X, Y topologische Räume und sei $p : Y \longrightarrow X$ unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung. Dann heißt p universelle Überlagerung : $\Longleftrightarrow$.
Ist Z zusammenhängend und $q : Z \longrightarrow X$ unverzweigte und unbegrenzte Überlagerung, so gibt es zu jedem $y \in Y$, $z \in Z$ mit $p(y) = q(z)$ genau eine stetige spurtreue Abbildung $f : Y \longrightarrow Z$ mit $f(y) = z$.

Bemerkung (1.16):

Ein universeller Überlagerungsraum ist bis auf Isomorphie (bei Riemannschen Flächen bedeutet das "biholomorphe Äquivalenz") eindeutig bestimmt.

Satz (1.17):

Seien X, Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und Y einfach - zusammenhängend.
$p : Y \longrightarrow X$ sei eine unbegrenzte, unverzweigte Überlagerung.
Dann ist p die universelle Überlagerung von X .

Satz (1.18):

X sei eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit Y und eine unverzweigte, unbegrenzte

Überlagerung $p : Y \longrightarrow X$.

Aus Satz (1.17) folgt dann, daß p bereits die universelle Überlagerung von X ist.
Ist X eine Riemannsche Fläche, so ist die universelle Überlagerung Y ebenfalls eine (einfach zusammenhängende) Riemannsche Fläche.
Dies folgt aus

Satz (1.19):

X sei Riemannsche Fläche und Y T_2-Raum.
Ist $p : Y \longrightarrow X$ unverzweigte Überlagerung, dann existiert eine komplexe Struktur auf Y , so daß sogar p lokal biholomorph ist. ("Man hebt die Karten hoch").

Definition (1.20):

Seien X, Y topologische Räume und sei $p : Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung.
Eine Decktransformation von p ist ein bzgl. p spurtreuer Homöomorphismus $f : Y \longrightarrow Y$.
Ist p holomorph, so ist f biholomorph.

Bermerkung (1.21):

Die Menge aller Decktransformationen von p bildet bzgl. der Komposition eine (i.a. nicht abelsche) Gruppe und wird mit Deck (Y/X) bzw. im Fall Riemannscher Flächen auch mit Aut (Y, p) bezeichnet.
Wenn Mißverständnisse zu befürchten sind, schreibt man statt
Deck (Y/X) genauer Deck $(Y \xrightarrow{p} X)$.

Definition (1.22):

X, Y seien zusammenhängende T_2-Räume und $p : Y \longrightarrow X$ sei unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung.

p heißt galoissch : $\Longleftrightarrow$.
$\forall\, y_0,\ y_1 \in Y$ mit $p(y_0) = p(y_1)$ existiert eine Decktransformation $f : Y \to Y$ mit $f(y_0) = y_1$, die eindeutig bestimmt ist.

Satz (1.23):

X sei Riemannsche Fläche ; $p : Y \longrightarrow X$ die universelle Überlagerung. Dann ist p galoissch mit Aut $(Y, p) \cong \pi_1(x)$, wobei $\pi_1(x)$ die Fundamentalgruppe von X bezeichnet.

Satz (1.24):

Seien X, Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten,
$q : Y \longrightarrow X$ eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerung und $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ die universelle Überlagerung. Sei $f : \tilde{X} \longrightarrow Y$ eine nach Definition der universellen Überlagerung existierende stetige spurtreue Abbildung. Dann ist f eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsabbildung und es gibt eine Untergruppe $\mathcal{G} \subset$ Deck $(\tilde{X}/X)$, so daß zwei Punkte $x, x' \in \tilde{X}$ genau dann durch f auf denselben Punkt abgebildet werden, wenn sie äquivalent modulo $\mathcal{G}$ sind. Es gilt $\mathcal{G} \cong \pi_1(Y)$.

Bemerkung (1.25):

Insbesondere ist $f : \tilde{X} \longrightarrow Y$ die universelle Überlagerung von Y und für $\mathcal{G}$ wählt man $\mathcal{G} =$ Deck $(\tilde{X}/Y)$.

Satz (1.24) stellt also eine Bijektion zwischen den Untergruppen von Deck $(\tilde{X}/X)$, $\tilde{X} \longrightarrow X$ universell und den Zwischenüberlagerungen her.

Man hat also folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & Y \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd} \qquad \begin{array}{lcl} \mathcal{G} & \longrightarrow & \tilde{X}/\mathcal{G} \\ Y & \longrightarrow & \text{Deck } (\tilde{X}/Y) \end{array}$$

Das ist völlig analog zur Galois-Theorie in der Algebra.

Der Riemannsche Abbildungssatz für Riemannsche Flächen besagt nun, daß jede einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche biholomorph äquivalent zu $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder zum offenen Einheitskreis $\mathbb{E}$ ist.

Dies bedeutet, daß sich jede Riemannsche Fläche entweder durch $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{E}$ universell überlagern läßt. Die Zahlenkugel $\mathbb{P}^1$ und jede zu $\mathbb{P}^1$ biholomorph äquivalente Riemannsche Fläche wird universell durch $\mathbb{P}^1$ überlagert.

Die Tori $\mathbb{C}/\Gamma$ und alle hierzu biholomorph äquivalenten Riemannschen Flächen werden biholomorph durch $\mathbb{C}$ überlagert.

Jede kompakte Riemannsche Fläche , die weder zu $\mathbb{P}^1$ noch zu einem Torus $\mathbb{C}/\Gamma$ biholomorph äquivalent ist, wird universell durch $\mathbb{E}$ überlagert.
Insbesondere werden alle nicht kompakten Riemannschen Flächen, außer $\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$, universell durch $\mathbb{E}$ überlagert.
$\mathbb{C}$ und $\mathbb{C}^*$ werden von $\mathbb{C}$ universell überlagert.

Freie Gruppen

Es sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $E \subset \mathcal{G}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{G}$. Dann hat jedes Element $g \in \mathcal{G}$, $g \neq 1$, eine Darstellung der Form $g = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ mit $x_1, \ldots, x_k \in E$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$. Diese Darstellung ist i.a. nicht eindeutig, da zwischen den Elementen von E gewisse Relationen gelten können. Bei diesen Relationen unterscheidet man zwischen "allgemeinen" oder speziellen Relationen. Die ersteren folgen aus den Gruppenaxiomen und gelten daher in jeder Gruppe, z.B. $x\,x^{-1} = x^{-1}\,x = 1$. Die speziellen Relationen sind diejenigen, die nicht aus den Gruppenaxionen folgen und nur in bestimmen Gruppen gelten; z.B. gilt in abelschen Gruppen die spezielle Relation $xy = yx$, und in Gruppen der Ordnung n gilt die spezielle Relation $x^n = 1$. Die Gruppe der ganzzahligen $(2,2)$-Matrizen mit Determinante $+1$ wird von den Matrizen $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ erzeugt, und es gelten die speziellen Relationen $A^2 B^{-3} = 1$ und $A^4 = 1$. Eine Gruppe, in der keine speziellen Relationen gelten, heißt eine freie Gruppe:

Definition (1.26):

Ein Erzeugendensystem E einer Gruppe heißt frei (oder: E erzeugt $\mathcal{G}$ frei), wenn gilt: besteht in $\mathcal{G}$ eine Relation
$x_1^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{\varepsilon_k} = 1$ mit $x_1, \ldots, x_k \in E$ und $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{-1, 1\}$, so gibt es ein j mit $1 \leq j \leq k-1$ und $x_j = x_{j+1}$ und $\varepsilon_j = -\varepsilon_{j+1}$.
Eine Gruppe heißt freie Gruppe, wenn Sie ein freies Erzeugendensystem besitzt.
Nun stellt sich natürlich sofort die Frage nach der Existenz freier Gruppen: gibt es überhaupt freie Gruppen ?
Die Beantwortung liefert:

Satz (1.27):

Sei n eine positive ganze Zahl. Dann gibt es eine freie Gruppe, die durch eine Menge von n Elementen frei erzeugt wird.

Daß nun die Darstellung eines Elements $g \neq 1$ einer freien Gruppe $\mathcal{G}$ eindeutig ist, folgt aus:

Satz (1.28):

Sei E ein freies Erzeugendensystem der freien Gruppe $\mathcal{G}$ Dann hat jedes von 1 verschiedene Element $x \in \mathcal{G}$ eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form $x = x_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}$ mit $x_1, \ldots, x_k \in E$, $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und $x_j \neq x_{j+1}$ für $1 \leq j \leq k-1$.

Aus der linearen Algebra ist bekannt, daß ein Vektorraumhomomorphismus durch die Bilder der Elemente einer Basis bestimmt wird.
Für eine freie Gruppe $\mathcal{G}$ gilt analog:

Satz (1.29):

Sei E ein freies Erzeugendensystem der Gruppe $\mathcal{G}$ und sei H eine beliebige

Gruppe. Dann gibt es zu jeder Funktion $S : E \longrightarrow H$ genau einen Homomorphismus $S^* : \mathcal{G} \longrightarrow H$ mit $S^*|E = S$.

Also genügt es auch hier die Bilder der freien Erzeugenden anzugeben, um einen Homomorphismus $\mathcal{G} \longrightarrow H$ zu bestimmen.

Satz und Definition (1.30):

Je zwei freie Erzeugendensysteme einer freien Gruppe haben gleiche Mächtigkeit; diese Mächtigkeit heißt der Rang der freien Gruppe. Zwei freie Gruppen sind genau dann isomorph, wenn Sie gleichen Rang haben. Zu jeder Kardinalzahl α gibt es eine freie Gruppe vom Rang α .

Weitere bekannte Eigenschaften von freien Gruppen sind:

1) Eine von einer Menge E mit mindestens 2 Elementen frei erzeugte Gruppe ist nicht abelsch.

2) Eine endliche Gruppe $\mathcal{G}$ ist nicht frei, wenn $\mathcal{G} \neq 1$

3) Eine freie Gruppe von E mit $|E| \geq 2$ frei erzeugt, hat triviales Zentrum, d.h. das Zenrum enthält nur das Einselement.

4) Jede Untergruppe H einer freien Gruppe ist frei.

1. Die Endlichkeit der Gruppe $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$

Theorem 1:

$$\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{3N-7} \quad , & N \text{ ungerade} \\ (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{3N-7} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \, , & N \text{ gerade} . \end{cases}$$

Dazu wird vorbereitend noch folgendes bemerkt.
Bezeichnet man die kanonischen meromophen Funktionen auf $F(N)$ mit x und y , also

$$\begin{aligned} x(X:Y:1) &= X \; , \\ y(X:Y:1) &= Y \; , \end{aligned} \tag{2.1}$$

so wird der Funktionenkörper von $F(N)$ dann bekanntlich von x und y erzeugt, d.h. man kann jede meromorphe Funktion auf $F(N)$ rational durch x und y ausdrücken, $F(N) = k(x,y)$.

Die folgenden Funktionen auf $F(N)$ repräsentieren Elemente von $\mathcal{U}^\infty$:

$$\begin{gathered} x \; , \qquad\qquad y \; , \\ x-\xi^j \; , \quad y-\xi^j \; , \quad x-\varepsilon\xi^j y \; , \\ (0 \le j \le N-1) \, . \end{gathered} \tag{2.2}$$

Weiterhin erzeugen die Funktionen (2.2) einen Untermodul vom Rang $3N-1$ in $\mathcal{U}^\infty$. Damit ist $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ endlich. Allerdings erzeugen die Funktionen (2.2) nicht alle Elemente von $\mathcal{U}^\infty$. Die Gruppe $\mathcal{U}^\infty$ wird zusammen mit den folgenden 3 Funktionen erzeugt:

1) $$\left(\prod_{j=0}^{N-1}((x-\xi^j)(y-\xi^j))^j\right)^{1/N}$$

2) $$\left(\prod_{j=0}^{N-1}((x-\xi^j)(x-\varepsilon\xi^j y))^j\right)^{1/N}$$

3) $$\left(\prod_{j=0}^{N-1}((x-\xi^j)(y-\xi^j)(x-\varepsilon\xi^j y))^{j(j+1)/2}\right)^{1/E(N)}$$

mit

$$E(N) := \begin{cases} N & \text{für } N \text{ ungerade,} \\ \frac{N}{2} & \text{für } N \text{ gerade .} \end{cases}$$

Es wird natürlich, wie auch im folgenden, weiterhin $N > 2$ vorausgesetzt.

Wegen

$$\begin{aligned} x(X:Y:1) &= 0 \iff X = 0 \\ y(X:Y:1) &= 0 \iff Y = 0 \end{aligned}$$

sind die Punkte, die bezgl. der Überlagerung x (bzw. y) von $\mathbb{P}^1$ über ∞ liegen, genau die Punkte mit den homogenen Koordinaten $(X:Y:Z)$ auf $F(N)$ mit $Z = 0$.

Besitzt also x (bzw. y) in $(X:Y:Z)$ eine Nullstelle oder einen Pol, so gilt $X = 0$ oder $Z = 0$ (bzw. $Y = 0$ oder $Z = 0$) , d.h. $(X:Y:Z)$ muß ein unendlich ferner Punkt auf $F(N)$ sein. Die Funktionen x und y definieren also Restklassen $x\,\mathbb{C}^*$ und $y\,\mathbb{C}^*$ in $\mathcal{U}^\infty$.

Per definitionem existieren Funktionen x, y auf $F(N)$ mit $x^N + y^N = 1$, welche den Funktionenkörper erzeugen. Ist x (wobei jetzt abkürzend x für $x(X:Y:Z)$ geschrieben wird) gleich einer N-ten Einheitswurzel von 1, so ergibt sich $y = 0$, ist aber y (genauer $y(X:Y:Z)$) gleich einer N-ten Einheitswurzel von 1, so ist $x = 0$. Da zudem x und $x - \xi^j$ (bzw. y und $y - \xi^j$) für $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ die gleichen Polstellen besitzen, definieren $x - \xi^j$ und $y - \xi^j$ Restklassen in $\mathcal{U}^\infty$.

Für $y \neq 0$ gilt:

$$\prod_{j=0}^{N-1}(x-\varepsilon\xi^j y) = \prod_{j=0}^{N-1}(\varepsilon y(\frac{x}{y\varepsilon}-\xi^j)) = (\varepsilon y)^N((\frac{x}{y\varepsilon})^N-1)$$

$$= x^N-(\varepsilon y)^N = x^N-(-1)y^N = x^N+y^N = 1\,.$$

In solchen Punkten, in denen x und y endliche Werte annehmen, ist also $x-\varepsilon\xi^j y\neq 0$, somit definiert $x-\varepsilon\xi^j y$ eine Restklasse in $\mathcal{U}^\infty$ für $j\in\{0,\ldots,N-1\}$, d.h. zusammengefaßt, die $(3N-1)$ Funktionen aus (2.2) definieren Restklassen in $\mathcal{U}^\infty$.

Bevor nun die Divisoren, sowie Null- und Polordnungen der Funktionen aus (2.2) bestimmt werden, zuerst eine Vorbemerkung:

Weil y einer Gleichung N-ten Grades über $\mathbb{C}(x)$ genügt, ist x eine N-blättrige Überlagerung von $\mathbb{P}^1$, denn definiert man eine Fläche F durch ein irreduzibles Polynom $P(x,y)$, so kann man $P(x,y)$ als Polynom in y über $\mathbb{C}(x)$ auffassen.

Es gilt dann:

Blätterzähl (x) = Grad von $P(x,y)$ über $\mathbb{C}(x)=\deg_y P(x,y)$.

Ebenso ist y eine N-blättrige Überlagerung von $\mathbb{P}^1$. Somit besitzen x und y mit Vielfachheit gezählt genau N Nullstellen. Da nicht konstante meromorphe Funktionen auf kompakten Riemannschen Flächen jeden Wert aus $\mathbb{P}^1$ mit Vielfachheit gerechnet gleich oft annehmen, besitzen x und y also auch genau N Polstellen (mit Vielfachheit gerechnet).

Mit ähnlichen Argumentationen über N-blättrige Überlagerungen lassen sich auch die Divisoren von $x-\xi^j$ und $y-\xi^j$ bestimmen, lediglich $(x-\varepsilon\,\xi^j y)$ muß durch Karten berechnet werden.
Natürlich kann man generell die Divisoren durch Karten berechnen; die Null- bzw. Polordnungen sind kartenunabhängig.
Ist aber t lokale Variable in $a\in F(N)$ mit $t(a)=0$, so kann man versuchen, die Funktionen f , deren Divisor bestimmt werden soll, explizit zu entwickeln, d.h.

$$f = \sum_{v=v_0}^{\infty} a_v t^v .$$

Für die Divisoren $(f_1), \ldots, (f_g)$ der meromorphen Funktionen $f_1, \ldots, f_g$ gilt:

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_g) = (f_1) + \ldots + (f_g)$$

Nun definiert man noch:

$$\begin{aligned} a_j &:= (0, \xi^j, 1) \\ b_j &:= (\xi^j, 0, 1) \\ c_j &:= (\varepsilon \xi^j, 1, 0) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Bestimmung der Divisoren:

Sei jetzt also

$$p(t) \; = \; \left(t, \sqrt[N]{1 - t^N}\right)$$

eine Parametrisierung von $F(N)$ um die Punkte $(0, \xi^k)$.

Es gilt also lokal $x(p(t)) = t$. Da t in $t = 0$ eine einfache Nullstelle besitzt, gilt für den Nullstellendivisor $(X)_0 : (X)_0 = a_0 + \ldots + a_{N-1}$.

Weil eine meromorphe Funktion genau soviele Nullstellen wie Pole hat (mit Vielfachheit gezählt), ergibt sich mit dem Polstellendivisor $(X)_\infty : (X) = (X)_0 - (X)_\infty$,

d.h. es ist

$$\begin{aligned} (X)_\infty &= c_0 + \ldots + c_{N-1} \qquad \text{also} \\ (X) &= a_0 + \ldots + a_{N-1} - c_0 - \ldots - c_{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} a_j - \sum_{j=0}^{N-1} c_j . \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} y(p(t)) &= y(\sqrt[N]{1-t^N},t) = \sqrt[N]{1-x^N} \quad (\sqrt[N]{1-t^N},t) \\ &= \sqrt{1-(\sqrt[N]{1-t^N})^N} = \sqrt[N]{1-1+t^N} = \sqrt[N]{t^N}\,. \end{aligned}$$

$(\sqrt[N]{t^N})^N = t^N$ besitzt in $t = 0$ eine N-fache Nullstelle, d.h. es ist:

$$\begin{aligned} (Y^N)_0 &= N\,b_0 + \ldots + N\,b_{N-1} \quad , \\ (Y)_0 &= b_0 + \ldots + b_{N-1} && \text{und} \\ (Y)_\infty &= c_0 + \ldots + c_{N-1} \quad , && \text{somit ist} \\ (Y) &= b_0 + \ldots + b_{N-1} - c_0 - \ldots - c_{N-1} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} b_j - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \quad . \end{aligned}$$

Da $y(X,Y) = Y$ die Projektion auf die 2. Koordinate ist, kann man auch folgendermaßen argumentieren: mit $y(p(t)) = y(\sqrt[N]{1-t^N},t) = t$ und weil t in $t = 0$ eine einfache Nullstelle besitzt, folgt alles wie bei x .

Die Funktion $x - \xi^j$ hat eine Nullstelle in $(\xi^j, 0)$.

Wählt man die Parametrisierung

$$p(t) = (\sqrt[N]{1-t^N},t) \quad \text{von} \quad F(N)$$

um $(\xi^j, 0)$ auf dem Zweig der N-ten Wurzel mit

$$\sqrt[N]{1-t^N}_{/t=0} = \xi^j\,, \qquad \text{so gilt}$$

$$\sqrt[N]{1-t^N} = \xi^j \quad \sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}}\,.$$

Hierbei ist $\sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}}$ der Zweig der N-ten Wurzel mit

$$\sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}_{/t=0}} = 1 .$$

Man erhält:

$$\begin{aligned}
(X-\xi^j)(p(t)) &= \xi^j \sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}} - \xi^j \\
&= \xi^j[(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{N}}{k} (-t^N)^{k}) - 1] \\
&= \xi^j[(1 - \frac{1}{N}\, t^N + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2}\, t^{2N} - \ldots + \ldots) - 1] \\
&= \xi^j[-\frac{1}{N}\, t^N + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2}\, t^{2N} - \ldots + \ldots] \quad .
\end{aligned}$$

Sei jetzt

$$\lambda(t) := [\,-\frac{1}{N}\, t^N + \frac{\frac{1}{N}(\frac{1}{N}-1)}{2}\, t^{2N} - \ldots + \ldots\,] .$$

Da $\lambda(t)$ in $t=0$ eine Nullstelle der Ordnung N besitzt, gilt dies auch für $x(p(t)) - \xi^j$, so daß man für den Nullstellendivisor
$(x-\xi^j)_0$ erhält:

$$(x-\xi^j)_0 = N\, b_j .$$

Trivialerweise hat $x - \xi^j$ dieselben Nullstellen wie x , deshalb gilt für den Polstellendivisor

$$
\begin{aligned}
(x-\xi^j)_\infty &= c_0+\ldots+c_{N-1}\,, \qquad \text{d.h.}\\
(x-\xi^j) &= N\ b_j - c_0 - \ldots - c_{N-1}\\
&= N\ b_j - \sum_{i=0}^{N-1} c_i \quad .
\end{aligned}
$$

Weil $y-\xi^j$ in $(\xi^j,0)$ eine Nullstelle besitzt, wählt man als Parametrisierung von $F(N)$ um $(\xi^j,0)$ $\;p(t)=(t,\ \sqrt[N]{1-t^N})$ wobei wieder gilt

$$
\sqrt[N]{1-t^N} \;=\; \xi^j\ \sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}} \quad .
$$

Wegen $y(p(t))-\xi^j \;=\; \sqrt[N]{1-t^N}-\xi^j \;=\; \xi^j\ \sqrt[N]{1-t^N}_{/\mathbb{R}}$ folgt die Behauptung

$$
(y-\xi^j) \;=\; N\ a_j - \sum_{i=0}^{N-1} c_i \qquad \text{wie bei} \qquad x-\xi^j\,.
$$

Bemerkung (zu den Polstellen):

Wie schon erwähnt besitzen x (bzw. y) und $x-\xi^j$ (bzw. $y-\xi^j$) die gleichen Polstellen. In homogenen Koordinaten lautet die Projektion

$$
x(X:Y:Z)=\frac{X}{Z} \quad \text{bzw.} \quad y(X:Y:Z)=\frac{Y}{Z}\,.
$$

Die unendlich fernen Punkte $c_1,\ldots,c_{N-1}$ sind aber die einzigen Punkte mit $Z=0$. Also gilt genau dort $x(c_j)=\infty$ und $y(c_i)=\infty$ wegen $\frac{\alpha}{0}:=\infty$, $\alpha\in\mathbb{C}$. In diesem Zusammenhang wird ausnahmsweise auch $\frac{0}{0}:=\infty$ gesetzt.

Nun wird die Funktion $x-\varepsilon\xi^j y$ betrachtet:

Offensichtlich verschwindet $x(X,Y)-\varepsilon\xi^j y(X,Y) \;=\; X-\varepsilon\xi^j Y$ in keinem endlichen Punkt $(X,Y)=(X,\ \sqrt[N]{1-X^N})$ auf $F(N)$, denn sonst würde gelten:

$$
\begin{aligned}
X - \varepsilon\xi^j \sqrt[N]{1-X^N} \;&=\; 0 \iff X \;=\; \varepsilon\xi^j \sqrt[N]{1-X^N} \\
\Longrightarrow X^N \;&=\; -1 + X^N \iff 0 \;=\; -1
\end{aligned}
$$

und das ist ein Widerspruch.

Nun wird $F(N)$ um $c_k = (\varepsilon\xi^k, 1, 0)$ durch $p(t) := \left(\frac{\sqrt[N]{1-t^N}}{t}\, ,\, \frac{1}{t}\right)$ parametrisiert.

Man erhält:

$$
x(p(t)) - \varepsilon\xi^j y(p(t)) \;=\; \frac{\sqrt[N]{1-t^N}}{t} - \frac{\varepsilon\xi^j}{t} \;=\; \varepsilon\xi^k \, \frac{\sqrt[N]{1-t^N}}{t}_{/\mathbb{R}} - \frac{\varepsilon\xi^j}{t}
$$

Binomialentwicklung liefert:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\xi^k \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{N}}{k} (-t^N)^k - \frac{\varepsilon\xi^j}{t} \right) \\
&= \varepsilon\xi^k \left((1 - \frac{1}{N}\, t^N + \frac{\frac{1}{N}\,(\frac{1}{N}-1)}{2}\, t^{2N} - \ldots + \ldots \right) - \frac{\varepsilon\xi^j}{t} \\
&= \frac{\varepsilon\xi^k}{t} - \frac{\varepsilon\xi^k}{N}\, t^{N-1} + \frac{\varepsilon\xi^k\, \frac{1}{N}\,(\frac{1}{N}-1)\, t^{2N-1}}{2} - \ldots + \ldots - \frac{\varepsilon\xi^j}{t}\,.
\end{aligned}
$$

Für $j \neq k$ liegt in $t = 0$ ein Pol 1. Ordnung und für $j = k$ liegt in $t = 0$ eine Wurzel $(N-1)$-ter Ordnung vor. Demnach besitzt $x - \varepsilon\xi^j y$ in c_j für $j \neq k$ einfache Pole und in c_j eine Nullstelle $(N-1)$-ter Ordnung. Damit gilt für den Divisor:

$$
(x - \varepsilon\xi^j y) \;=\; (N-1)\, c_j - c_0 - c_1 \ldots - c_{j-1} - c_{j+1} - \ldots - c_{N-1} \quad ;
$$

oder in der etwas angenehmeren Schreibweise

$$
\begin{aligned}
(x - \varepsilon\xi^j y) &= N\ c_j - c_0 - \ldots - c_{N-1} \\
&= N\ c_j - \sum_{k=0}^{N-1} c_k \ .
\end{aligned}
$$

Satz (2.4):

$\mathcal{D}^\infty$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $3N-1$ mit Basis

$$
\begin{aligned}
M_1 : &= \{a_0 - c_0\ ,\ b_0 - c_0\ ,\ a_0 - a_j\ ,\ b_0 - b_j\ , \qquad (2.5) \\
&= c_0 - c_j\ ;\quad (1 \leq j \leq N-1)\ .\}
\end{aligned}
$$

Beweis:

$\mathcal{D}^\infty$ ist offensichtlich ein echter Untermodul des endlich erzeugten $\mathbb{Z}$-Moduls $\widetilde{\mathcal{D}}^\infty$, definiert durch

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{D}}^\infty &:= \{D/D \text{ ist Divisor auf } F(N) \quad \text{mit} \\
D(P) &= 0 \text{ für } P \notin F^\infty(N)\}\ .
\end{aligned}
$$

Der $\mathbb{Z}$-Modul $\widetilde{\mathcal{D}}^\infty$ ist aber trivialerweise frei vom Rang $3N$ mit Basis

$$a_0, \ldots, a_{N-1}\ ,\ b_0, \ldots, b_{N-1}\ ,\ c_0, \ldots, c_{N-1}\ .$$

Also ist $\mathcal{D}^\infty$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang kleiner gleich $3N-1$.
Es muß also noch gezeigt werden, daß M_1 $\mathbb{Z}$-linear unabhängig ist:

Sei

$$\lambda_0(a_0 - c_0) + \lambda_1(b_0 - c_0) + \alpha_1(a_0 - a_1) + \ldots + \alpha_{N-1}(a_0 - a_{N-1})$$

$$+\beta_1(b_0 - b_1) + \ldots + \beta_{N-1}(b_0 - b_{n-1}) + \gamma_1(c_0 - c_1)$$
$$+ \ldots + \gamma_{N-1}(c_0 - c_{N-1}) = 0 \qquad (-\text{Divisor}) .$$

Dann muß diese lineare Unabhängigkeit in jedem Punkt $P \in F(N)$ gelten wegen

$$(a_0 - c_0)(a_0) = 1 \, ; \, (a_0 - a_j)\,(a_0) = 1 \, , \, j = 1, \ldots, N-1$$
$$\text{und} \qquad \widetilde{D}(a_0) = 0 \qquad \text{für} \qquad \widetilde{D} \in M_1 \, .$$

Somit folgt

$$\lambda_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{N-1} = 0$$
Analog an der Stelle b_0 .

$$\lambda_1 + \beta_1 + \ldots + \beta_{N-1} = 0$$
Analog an der Stelle c_0 . (2.6)

$$-\lambda_0 - \lambda_1 + \gamma_1 + \ldots + \gamma_{N-1} = 0$$
Analog an den Stellen
$a_j \, , \, b_j \, , \, c_j \, ; \, j \in \{0, \ldots, N-1\}$ und

$$\gamma_j = 0 \, , \, \beta_j = 0 \, , \, \alpha_j = 0 \, ; \, j \in \{0, \ldots, N-1\} \tag{2.7}$$

(2.7) eingesetzt in (2.6) liefert $\lambda_0 = \lambda_1 = 0$.

Es ist klar, daß die Divisoren $\widetilde{D} \in M_1$ wegen $\deg \widetilde{D} = 1 - 1 = 0$ Elemente von $\mathcal{D}^\infty$ sind.

□ .

Betrachtet werden nun die folgenden Restklassen in $\mathcal{U}^\infty$:

$$M_2 := \{\frac{y-1}{x-\varepsilon y}\mathbb{C}^*\,, \quad \frac{x-1}{x-\varepsilon y}\mathbb{C}^*\,, \quad \frac{y-1}{y-\xi^j}\mathbb{C}^* \tag{2.7}$$

$$\frac{x-1}{x-\xi^j}\mathbb{C}^*\,, \quad \frac{x-\varepsilon y}{x-\varepsilon\xi^j y}\mathbb{C}^*\,, \quad j=1,\ldots,N-1\}$$

Um die Divisoren der Repräsentanten zu berechnen, genügt es natürlich die Standardrepräsentanten $\frac{y-1}{x-\varepsilon y}$ usw. zu betrachten.

Es gilt:

$$\left(\frac{y-1}{x-\varepsilon y}\right) = (y-1)-(x-\varepsilon y)$$

$$= N\ a_0 - (c_0 + \ldots + c_{N-1}) - (N\ c_0 - (c_0 + \ldots + c_{N-1}))$$

$$= N\ a_0 - c_0 - N\ c_0 + c_0 - c_0 - \ldots - c_{N-1} + c_0 + \ldots + c_{N-1}$$

$$= N\ a_0 - N\ c_0 = N(a_0 - c_0)$$

$$\left(\frac{x-1}{x-\varepsilon y}\right) = (x-1)-(x-\varepsilon y) =$$

$$= N\ b_0 - c_0 - \ldots - c_{N-1} - N\ c_0 + c_0 + \ldots + c_{N-1}$$

$$= N\ (b_0 - c_0)$$

$$\left(\frac{y-1}{y-\xi^j}\right) = (y-1)-(y-\xi^j)$$

$$= N\ a_0 - c_0 - \ldots - c_{N-1} - N\ a_j + c_0 + \ldots + c_{N-1}$$

$$= N(a_0 - a_j)$$

$$\left(\frac{x-1}{x-\xi^j}\right) = (x-1)-(x-\xi^j)$$

$$= N\ b_0 - c_0 - \ldots - c_{N-1} - N\ b_j + c_0 + \ldots + c_{N-1}$$

$$= N(b_0 - b_j)$$

und schließlich

$$\left(\frac{x-\varepsilon y}{x-\varepsilon\xi^j y}\right) = (x-\varepsilon y)-(x-\varepsilon\xi^j y)$$

$$= N\ c_0 - c_0 - \ldots - c_{N-1} - N\ c_j - c_0 - \ldots - c_{N-1}$$

$$= N(c_0 - c_j)\ .$$

Die Divisoren der Repräsentanten aus (2.7) sind also gerade die N-fachen der Basis aus (2.5) von $\mathcal{D}^\infty$.

Trivialerweise ist $N\ \mathcal{D}^\infty$ eine Untergruppe von $\mathcal{D}^\infty$, und weil die Basisdivisoren aus $N\ \mathcal{D}^\infty$ sogar Hauptdivisoren sind, folgt daß $N\ \mathcal{D}^\infty$ sogar Untergruppe von $\mathcal{F}^\infty$ ist.
Weiterhin sind die Moduln $\mathcal{U}^\infty$ und $\mathcal{F}^\infty$ kanonisch isomorph; also ist die Untergruppe $N\ \mathcal{D}^\infty$ von $\mathcal{F}^\infty$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathcal{U}^\infty$.
Es gilt $N\ \mathcal{D}^\infty \subset \mathcal{F}^\infty$, d.h. wenn jetzt gezeigt werden kann, daß $\mathcal{D}^\infty/N\ \mathcal{D}^\infty$ endlich ist, so ist natürlich auch $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ endlich.

Nun sind aber die Divisoren von M_2 gerade N-te Vielfache der Basiselemente aus M_1 . $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ ist also eine endliche Gruppe, und es exisitert ein Isomorphismus

$$g : \mathcal{D}^\infty/N\mathcal{D}^\infty \longrightarrow (\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z})^{3N-1}\ ,$$

d.h. man kann abschätzen

$$\sharp\,(\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty) \leq N^{3N-1}\ .$$

Jetzt wird die folgende meromorphe Funktionenmenge betrachtet:

$$\begin{aligned} M &:= \bigcup_{i=1}^{3} M_i \\ \text{mit} \qquad M_3 &:= \{x, y\, ,\, x-1\}\,. \end{aligned}$$

Definiert man noch $M_4 := M_2 \cup M_3$, so ergibt sich

Satz (2.8):

M_1 und M_4 erzeugen denselben $\mathbb{Z}$-Untermodul von $\mathcal{U}^\infty$.

Beweis:

Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathcal{U}^\infty$ wird multiplikativ geschrieben. Es ist klar, daß sich x und y $\mathbb{Z}$-linear durch M_4 ausdrücken lassen.

Weiter gilt:

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x-\xi^j} = \frac{1}{x-\xi^j} \in < M_4 > \Longrightarrow x - \xi^j \in < M_4 > .$$

$$\frac{x-1}{x-\varepsilon y} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-\varepsilon y} \in < M_4 > \Longrightarrow$$

$$\frac{x-\varepsilon y}{x-\varepsilon\xi^j y} \cdot \frac{1}{x-\varepsilon y} = \frac{1}{x-\varepsilon\xi^j y} \in < M_4 > \Longrightarrow$$

$x - \varepsilon\xi^j y \in < M_4 >$; außerdem gilt wegen

$x - \varepsilon y \in < M_4 >$:

$$x - \varepsilon y \cdot \frac{y-1}{x-\varepsilon y} = y - 1 \in < M_4 > \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{y-1} \in < M_4 > \Longrightarrow \frac{y-1}{y-\xi^j} \cdot \frac{1}{y-1} =$$

$$\frac{1}{y-\xi^j} \in < M_4 > \Longrightarrow y-\xi^j \in < M_4 > ,$$

also $\quad < M_1 > \subset < M_4 >$.

Andererseits erzeugen $3N-1$ Modulelemente einen Untermodul vom Rang $\leq 3N-1$. Da $< M_1 >$ frei vom Rang $3N-1$ ist, folgt $< M_1 > = < M_4 >$.

$\square$.

Definition (2.9):

Sei $\mathcal{F}^*$ die von der Menge der zu den meromorphen Funktionen aus M_1 gehörigen Hauptdivisoren erzeugte Untergruppe von $\mathcal{F}^\infty$ und $\mathcal{F}^{**}$ die von der Menge der zu den meromorphen Funktionen aus M_2 gehörigen Hauptdivisoren erzeugte Untergruppe von $\mathcal{F}^\infty$.

Bemerkung (2.10):

Wegen $< M_4 > = < M_1 >$ folgt $< M_2 > \subset < M_1 >$, d.h. $\mathcal{F}^{**}$ ist Untergruppe von $\mathcal{F}^*$.

Mit $< M_4 > = < M_1 >$, $\mathcal{F}^{**} = N\ \mathcal{D}^\infty$ und der kanonischen Isomorphie $\mathcal{U}^\infty \cong \mathcal{F}^\infty$, folgt, daß $\{(x)+\mathcal{F}^{**}, (y)+\mathcal{F}^{**}, (x-1)+\mathcal{F}^{**}\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{F}^*/\mathcal{F}^{**}$ ist.

Definiert man nun

$$\mathcal{S} : \mathcal{F}^*/\mathcal{F}^{**} \longrightarrow (\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^3$$

durch

$$\mathcal{S}(\lambda_1(x) + \lambda_2(y) + \lambda_3(x-1) + \mathcal{F}^{**}) := (\widehat{\lambda_1}\,,\,\widehat{\lambda_2}\,,\,\widehat{\lambda_3}) \quad ,$$

so ist $\mathcal{S}$ wohldefiniert, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(x) + \lambda_2(y) + \lambda_3(x-1) + \mathcal{F}^{**} \\
&= \mu_1(x) + \mu_2(y) + \mu_3(x-1) + \mathcal{F}^{**}
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\lambda_1-\mu_1)(x) + (\lambda_2-\mu_2)(y) + (\lambda_3-\mu_3)(x-1) \in \mathcal{F}^{**}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & (\lambda_1-\mu_1)\,((a_0+\ldots+a_{N-1}) - (c_0+\ldots+c_{N-1})) \\
& + (\lambda_2-\mu_2)\,((b_0+\ldots+b_{N-1}) - ((c_0+\ldots+c_{N-1})) \\
& + (\lambda_3-\mu_3)\,(N\,b_0 - (c_0+\ldots+c_{N-1})) \in \mathcal{F}^{**} = N\,\mathcal{D}^{\infty}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Longleftrightarrow \quad & (\lambda_1-\mu_1)\,(a_0+\ldots+a_{N-1}) + (\lambda_3-\mu_3)\,N\,b_0 \\
& + (\lambda_2-\mu_2)\,(b_0+\ldots+b_{N-1}) \\
& - (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 - \mu_1-\mu_2-\mu_3)\,(c_0+\ldots+c_{N-1}) \in N\,\mathcal{D}^{\infty} \quad ;
\end{aligned}$$

somit $\quad \hat{\lambda}_j = \hat{\mu}_j \quad (j = 1,2,3) \quad ,$

$\mathcal{S}$ ist also wohldefiniert.

Weiter gilt:

$$\mathcal{S}\ (\lambda_1(x) + \lambda_2(y) + \lambda_3\ (x-1)\ +\ \mathcal{F}^{**}\ +\ \mu_1(x)$$
$$+\ \mu_2(y)\ +\ \mu_3\ (x-1)\ +\ \mathcal{F}^{**})$$

$$=\ \mathcal{S}\ ((\lambda_1 + \mu_1)\ (x)\ +\ (\lambda_2 + \mu_2)\ (y)\ +\ (\lambda_3 + \mu_3)\ (x-1)\ +\ \mathcal{F}^{**})$$

$$=\ (\ \widehat{\lambda_1 + \mu_1}\ ,\ \widehat{\lambda_2 + \mu_2}\ ,\ \widehat{\lambda_3 + \mu_3}\ )$$

$$=\ (\ \hat{\lambda}_1\ ,\ \hat{\lambda}_2\ ,\ \hat{\lambda}_3\ )\ +\ (\hat{\mu}_1,\ \hat{\mu}_2,\ \hat{\mu}_3)$$

$$=\ \mathcal{S}\ (\lambda_1(x)\ +\ \lambda_2\ (y)\ +\ \lambda_3\ (x-1)\ +\ \mathcal{F}^{**})$$
$$+\ \mathcal{S}\ (\mu_1\ (x)\ +\ \mu_2\ (y)\ +\ \mu_3\ (x-1)\ +\ \mathcal{F}^{**})\ .$$

$\mathcal{S}$ ist somit ein Homomorphismus.

Weiterhin ist $\mathcal{S}$ offensichtlich injektiv und surjektiv. Also sind die Gruppen $\mathcal{F}^*/\mathcal{F}^{**}$ und $(\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z})^3$ isomorph.

Zusammenfassend erhält man also

$$\mathcal{D}^{\infty}/\mathcal{F}^{**} \cong (\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^{3N-1}$$

und (2.11)

$$\mathcal{F}^{*}/\mathcal{F}^{**} \cong (\mathbb{Z}/N\,\mathbb{Z})^{3}.$$

Satz (2.12):

Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $\mathcal{G} \overset{\Phi}{\cong} (\mathbb{Z}\,/\,n\,\mathbb{Z})^r$. Weiterhin sei H eine Untergruppe von $\mathcal{G}$ mit

$$H \overset{\Psi}{\cong} \mathbb{Z}/n_1\,\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/n_r\,\mathbb{Z}.$$

Dann gilt:

$$\mathcal{G}/H \cong \mathbb{Z}\,/\,(\frac{n}{n_1})\,\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}\,/\,(\frac{n}{n_r})\,\mathbb{Z}.$$

Beweis:

Man wählt $e_1,\ldots,e_r \in H$, die via Ψ den Elementen

$$(\hat{1}, \hat{0}, \ldots, \hat{0}), \ldots, (\hat{0}, \ldots, \hat{0}, \hat{1})$$

entsprechen und ebenso $d_1,\ldots,d_r \in \mathcal{G}$, die via Φ den Elementen

$$(\hat{1}, 0, \ldots, 0), \ldots, (\hat{0}, \ldots, \hat{0}, \hat{1})$$

entsprechen.

Es ist $n \cdot \mathcal{G} = n \cdot H = 0$, die Ordnung von e_j ist n_j, und offenbar teilt jedes n_j die Zahl n. Ferner kann man die $e's$ als ganzzahlige Linearkombination der $d's$ ausdrücken:

$$e_j = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}\, d_k \quad , \quad 1 \leq j \leq r,$$

wobei die α_{jk} zwischen 0 und $n-1$ gewählt werden können.

Behauptung :

Es gibt Elemente $f_j \in \mathcal{G}$ mit $\frac{n}{n_j} f_j = e_j$.

Nun gilt:

$$0 = n_j e_j = \sum_{k=1}^{r} n_j \alpha_{jk} d_k \quad \text{in} \quad \mathcal{G} ,$$

also ist $n_j \alpha_{jk}$ Vielfaches von n :

$$n_j \alpha_{jk} = r_{jk} n , \quad \text{somit} \quad \alpha_{jk} = r_{jk} \frac{n}{n_j} .$$

Man setzt $f_j = \sum r_{jk} d_k$ und alle haben die Ordnung n .

Nun ist

$$\det (\alpha_{jk}) = (\mathcal{G} : H) = \prod_j \left(\frac{n}{n_j} \right), \qquad \text{sowie}$$

$$\det (r_{jk}) = \det \left(\frac{n_j}{n} \alpha_{jk} \right) = \prod_j \left(\frac{n}{n_j} \right) \det (\alpha_{jk}) = 1 .$$

Weil $\det (r_{jk}) = 1$ ist, sind die Elemente $f_1 , \ldots , f_r$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathcal{G}$, d.h. es ist

$$\mathcal{G}/H \cong \mathop{\mathsf{X}}_j (\mathbb{Z} f_j / \mathbb{Z} e_j) \cong \mathop{\mathsf{X}}_j \left(\mathbb{Z} / \left(\frac{n}{n_j} \right) \mathbb{Z} \right)$$

$\square$.

Satz (2.13):

Es gilt: $$\mathcal{D}^{\infty} / \mathcal{F}^{*} \cong (\mathbb{Z}/N \, \mathbb{Z})^{3N-4} .$$

Bemerkung:

Die "obere Grenze" $(\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z})^{3N-1}$ von $\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^\infty$ wird also um den Faktor" $(\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z})^3$ verbessert.

Beweis:

Nach dem 2. Isomorphiesatz gilt:

$$\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^* \cong (\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^{**})\ /\ (\mathcal{F}^*/\mathcal{F}^{**})\,.$$

Wegen

$$(\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z})^{(3N-1)} \cong (\mathbb{Z}/N\ \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/\mathbb{Z}\,,\ (3N-4)\text{mal}$$

läßt sich Satz (2.12) auf (2.11) anwenden:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{D}^\infty/\mathcal{F}^{**})\ /\ (\mathcal{F}^*/\mathcal{F}^{**}) \\
&\cong (\mathbb{Z}\ /\ \tfrac{N}{N}\ \mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}\ /\ \tfrac{N}{1}\ \mathbb{Z})^{3N-4} \\
&\cong (\mathbb{Z}\ /N\ \mathbb{Z})^{3N-4}
\end{aligned}$$

$\square$.

Bevor jetzt ein Kriterium angegeben wird, ob eine Wurzel eines Elementes aus $\mathcal{U}^\infty$ wieder ein Element aus $\mathcal{U}^\infty$ ist, vorab die

Definition (2.14):

Sei X eine Riemannsche Fläche und $S \subset X$ eine endliche Menge. Ein Element $f \in$ Mer (X) , also eine meromorphe Funktion auf X , heißt eine S-Einheit, wenn die Pole und Nullstellen von f in S liegen, Bezeichnung $E(S)$.

Sei nun C eine kompakte Riemannsche Fläche und $f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1$ eine nicht konstante meromorphe Funktion. Weiterhin sei S eine endliche Teilmenge von C , die außerdem alle Pol- und Nullstellen von f enthalte.

Betrachtet wird jetzt die Menge

$$C' := C - S \; ,$$

sowie die universelle Überlagerung

$$p : \mathbb{H} \longrightarrow C' \quad \text{von} \quad C' \, .$$

Allerdings muß hier der Fall $C = \mathbb{P}^1$, $C' = \mathbb{P}^1 - \{P_1 \, , \, P_2\} \cong \mathbb{C}^*$ ausgeschlossen werden, um zu gewährleisten, daß die universelle Überlagerung die obere Halbebene $\mathbb{H}$ ist.
Natürlich ist p lokal biholomorph, $f \circ p$ ist holomorph auf $\mathbb{H}$ und $f \circ p$ ist überall ungleich Null.

Nun existiert eine holomorphe Funktion $\log\, f \circ p$ auf $\mathbb{H}$ mit

$$e^{\log\, f \circ p} = f \circ p \, .$$

Diese Aussage folgt sofort aus dem bekannten Satz (2.15):

Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche. Dann existieren zu jeder holomorphen Funktion $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ holomorphe Funktionen g, h mit

$$e^g = f \qquad \text{und} \qquad h^N = f \; .$$

Satz (2.16):

Ist $\mathcal{G} := \text{Aut}\,(\mathbb{H}, p)$ die Decktransformationsgruppe von $\mathbb{H}$ bzgl. p und $\sigma \in \mathcal{G}$, so ist für $z \in \mathbb{H}$

$$z \xrightarrow{\phi} \frac{1}{2\pi i} \left((\log\,(f \circ p) \circ \sigma)\,(z) - \log\,(f \circ p)\,(z) \right) \in \mathbb{C}$$

eine $\mathbb{Z}$-wertige konstante Funktion.

Beweis:

Es gilt:

$$e^{\log (f \circ p)(\sigma z) - \log (f \circ p)(z)}$$

$$= \frac{e^{\log (f \circ p)(\sigma z)}}{e^{\log (f \circ p)(z)}} = \frac{(f \circ p)(\sigma z)}{(f \circ p)(z)}$$

$$= \frac{f(p \sigma z)}{f(p z)} \overset{(2.17)}{=} \frac{f(p z)}{f(p z)} = 1 \qquad (2.18)$$

$\square$.

Bemerkung:

(2.17): σ ist Decktransformation; die Schreibweise $\frac{f(p z)}{f(p z)}$ $\left(\text{konkrete Schreibweise } \frac{(f \circ p)(\sigma(z))}{(f \circ p)(z)}\right)$ wird zu keinen Mißverständnissen führen.

Aus (2.18) folgt jetzt:

$$\log (f \circ p)(\sigma z) - \log (f \circ p)(z) \in \{2k\pi i \ / \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Da $\mathbb{H}$ (bzw. $\mathbb{E}$) zusammenhängend ist, folgt für alle $z \in \mathbb{H}$:

$$\log (f \circ p)(\sigma z) - \log (f \circ p)(z) = 2\pi l\, i\,, \ l \in \mathbb{Z}.$$

Satz (2.19):

Die Konstante (2.18) aus Satz (2.16) ist unabhängig von der Wahl des Logarithmus $\log (f \circ p)$.

Beweis:

Ein anderer Zweig des Logarithmus von $f \circ p$ unterscheidet sich von $\log f \circ p$ um eine Konstante $2\pi i k$ $(k \in \mathbb{Z})$, die aber bei der Subtraktion (s. Satz 2.16) wieder verschwindet.

$\square$.

Defninition (2.20):

Die Konstante $\dfrac{f(p\,z)}{f(p\,z)} = 1$ (2.18) wird mit $L(f \circ p\,,\,\sigma)$ bzw. kurz mit $L(f,\sigma)$ bezeichnet und logarithmisches Symbol genannt.

Satz (2.21):

Es gibt genau dann eine holomorphe m-te Wurzel $f^{\frac{1}{m}}$ von f auf C, wenn m für alle σ ein Teiler von $L(f,\sigma)$ ist, d.h. :

Sei $f \in \{f \in \text{Mer}\,(C)/\text{ord}_p\, f = 0\ \forall\, p \notin S\}$ und f besitzt eine m-te Wurzel als Funktion auf

$$C :\Longleftrightarrow m | L(f,\sigma)\ \forall\, \sigma \in \text{Deck}\,(p : \mathbb{E} \longrightarrow C')\,.$$

Beweis:

" $\Longrightarrow$ ":

Sei γ ein Weg von z nach $\sigma(z)$ und $\phi = g^m$ mit $g \in \text{Mer}\,(C)$; dann gilt:

$$L(f,\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p\circ\gamma} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{p\circ\gamma} \frac{dg^m}{g^m}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{p\circ\gamma} \frac{mg^{m-1}}{g^m}\, dg = \frac{m}{2\pi i} \int_{p\circ\gamma} \frac{d\,g}{g}$$

und $\int_{p\circ\gamma} \frac{dg}{g}$ ist ganzzahlig.

„ $\Longrightarrow$ ":

Aufgrund der Abbildung $p : \mathbb{E} \longrightarrow C'$ existiert $\log\,(l \circ p)$. Ferner existiert $\phi := e^{\frac{1}{m}\log\,(f\circ p)}$ auf der universellen Überlagerung. Definiert man noch $\phi^\sigma(z) := \phi\,(\sigma(z))$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&(\phi^\sigma \circ \phi^{-1})\,(z) \\
&= \exp\left[\,\frac{1}{m}\,(\log\,(f\circ p))\,(\sigma(z))\,\right] \\
&\quad\cdot \exp\left[\,-\frac{1}{m}\,(\log\,(f\circ p))\,(z)\,\right] \\
&= \exp\left[\,\frac{1}{m}\,(\log\,(f\circ p)\,(\sigma\, z) \;-\; \log\,(f\circ p))\,(z)\,\right] \\
&= \exp\left(\frac{2\pi i}{m}\,L(f,\sigma)\right) = \left(\exp\,\frac{2\pi i}{m}\right)^{L(f,\sigma)} \\
&= \xi^{L(f,\sigma)} \quad .
\end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\xi^\sigma \;=\; \xi^{L(f,\sigma)}\;\cdot\;\phi\,.$$

Da $m|L(f,\sigma)$ gilt, folgt $\xi^\sigma = \xi$, d.h. es existiert ein $\overline{\xi} \in Mer\,(C)$ sowie

$\overline{\xi} \in Mer\,(C')$, als Anwendung des Riemannschen Fortsetzungssatzes.

$\square$.

Satz 2.21 wird jetzt auf

$$C \;=\; F(N) \qquad \text{und}$$

$$C' = \; F(N)' \;:=\; F(N) - F^{\infty}(N)$$

angewendet.

Bemerkung (2.22):

Die Abbildung

$$L(f\ ,\cdot) : \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U}\ ,\ p) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

mit der universellen Überlagerung $\mathcal{U}$ ist ein Gruppen-Homomorphismus. Dann wird ein Homomorphismus

$$\tilde{L}(f\ ,\cdot) : \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)/\,[\ \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)\ ,\ \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

$$\sigma\,[\mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)\ ,\ \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)] \longrightarrow L(f,\sigma)$$

induziert, der ebenfalls mit $L(f\ ,\ \cdot)$ bezeichnet wird.

Feststellung (2.23):

Sei M^* die multiplikative Gruppe der meromorphen Funktionen ϕ_i auf C mit der Eigenschaft, daß die Menge der Null- und Polstellen eine Teilmenge von $C - C'$ ist.
Dann ist für alle Decktransformationen $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)$ die Abbildung

$$L(\cdot\ ,\ \sigma) : M^* \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Gruppenhomomorphismus.

Beweis :

Klar, weil $\log(fg) = \log f + \log g$ gilt.

$\square$.

$L(\cdot\,,\sigma)$ verschwindet auf den konstanten (const. $\neq 0$) meromorphen Funktionen, wegen

$$L(\text{const.}\,,\sigma) = \int\limits_{po(z,\sigma z)} \frac{d\ \text{const.}}{\text{const.}} = \int\limits_{po(z,\sigma z)} \frac{0}{\text{const.}} = 0\,.$$

$\square$.

Nun induziert $L(\cdot\,,\sigma)$ einen Homomorphismus $L(\cdot\,,\sigma) : \mathcal{U}^\infty \longrightarrow \mathbb{Z}$, der ebenfalls mit $L(\cdot\,,\sigma)$ bezeichnet wird.

$$L(\cdot\,,\sigma)\,(f\,\mathbb{C}^*) := L(\cdot\,,\sigma)\,(f) = L(f,\sigma)\,.$$

Zusammenfassung der Resultate über $L(f\,,\cdot)$ und $L(\cdot\,,\sigma)$ liefert:
L ist ein Homomorphismus in der ersten Variablen, d.h. es gilt

$$L(fg,\sigma) = L(f,\sigma) + L(g,\sigma) \quad ;$$

offensichtlich gilt auch

$$L(f,\sigma\tau) = L(f,\sigma) + L(f,\tau) \quad ,$$

das Symbol $L(f,\sigma)$ ist also bimultiplikativ in f und σ .

Die Abbildung

$$L : \mathcal{U}^\infty \times \text{Aut}\,(\mathcal{U},p)\,/\,[\text{Aut}\,(\mathcal{U},p)\,,\,\text{Aut}(\mathcal{U},p)] \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist Bilinearform.

Sei $f_1\,,\ldots,\,f_r$ eine Aufzählung der Funktionen (2.2) und $\sigma_1\,,\ldots,\,\sigma_s$ ein Erzeugendensystem von

$$\text{Aut}\,(\mathcal{U},p)\,/\,[\text{Aut}(\mathcal{U},p)\,,\,\text{Aut}\,(\mathcal{U},p)]\,.$$

Bildet man die Matrix

$$\begin{pmatrix} L(f_1\,,\,\sigma_1) & \dots & L(f_r\,,\sigma_1) \\ \vdots & & \vdots \\ L(f_1\,,\,\sigma_s) & \dots & L(f_r\,,\,\sigma_s) \end{pmatrix} \quad , \tag{2.24}$$

so erhält man durch elementare Spalten- bzw. Zeilenumformungen wieder eine Matrix dieses Typs. Durch die Methode der Matrix-Reduktion bekommt man neue meromorphe Funktionen $g_1\,,\dots,\,g_t$ und ein neues Erzeugendensystem

$$\eta_1\,,\dots,\,\eta_k \qquad \text{von} \qquad \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)\;/\;[\mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)\;,\;\mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},p)]\;,$$

sowie eine Diagonalmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc} m_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & m_t \\ \hline & 0 & \end{array}\right)$$

mit $m_k \;=\; L(g_k\;,\;\eta_k)\,.$

Dann gilt

Satz (2.25):

$g_1^{\frac{1}{m_1}}\,,\dots,\,g_t^{\frac{1}{m_t}}$ ist ein Erzeugendensystem bzw. Basis von $\mathcal{U}^\infty$.

Beweis:

Klar, da durch elementare Zeilen- bzw. Spaltenoperationen der Rang einer Matrix nicht verändert wird. Diese Umformungen sind Bestandteil der Matrixreduktion.

□.

2. Berechnung der logarithmischen Symbole (Perioden)

Nun werden die für die Matrixreduktion benötigten logarithmischen Symbole (Perioden) berechnet. Hierfür ist es sehr nützlich, sich vorab folgendes Diagramm zu vergegenwärtigen.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & F(N)' \arrow[dl, "p'"] \\
& F(1)' = \mathbb{C} - \{0,1\} &
\end{tikzcd}$$

Im folgenden werden also die Perioden bzgl. der Überlagerung λ bzw. bzgl. der Überlagerung p berechnet. Da aber keine Mißverständnisse zu befürchten sind, werden beide logarithmischen Symbole mit $L(\, , \,)$ bezeichnet.

Sei also $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\}$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C} - \{0,1\}$. Aus $\mathcal{U}$ wird später die universelle Überlagerung von $F(N)'$ konstruiert. Die Abbildungen λ und $1-\lambda$ sind holomorph und ungleich Null auf $\mathcal{U}$. Also existieren N-te holomorphe Wurzeln $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ von λ bzw. von $1-\lambda$.

Satz (3.1):

Für $\sigma \in \mathrm{Aut}\,(\mathcal{U},\sigma)$ gilt:

$$\tilde{x} \circ \sigma = \xi^{L(\lambda,\sigma)}\, \tilde{x} \qquad \text{und}$$

$$\tilde{y} \circ \sigma = \xi^{L(1-\lambda,\sigma)}\, \tilde{y} \quad .$$

Beweis:

Es gilt für alle $z \in \mathcal{U}$:

$$\xi^{L(\lambda,\sigma)}\ \tilde{x}(z) =$$

$$= e^{\frac{2\pi i}{N}\ [\frac{1}{2\pi i}\ ((\log\lambda)\ \circ\ \sigma(z) - \log\lambda(z))]}\ .\ \tilde{x}(z)$$

$$= \frac{(\lambda(\sigma z))^{\frac{1}{N}}}{(\lambda(z))^{\frac{1}{N}}} \cdot \tilde{x}(z)$$

$$= \frac{\tilde{x}\ \circ\ \sigma(z)}{\tilde{x}(z)} \cdot \tilde{x}(z) = \tilde{x}\ \circ\ \sigma(z)\ .$$

Völlig analog erhält man:

$$\xi^{L(1-\lambda,\sigma)} = \tilde{y}\ \circ\ \sigma(z)\ .$$

$\square$

Satz und Definition (3.2):

Sei $\Phi := \text{Aut}\ (\mathcal{U},\lambda)$ und $\Phi(N)$ die Menge aller σ aus Φ mit $\sigma \circ \tilde{x} = \tilde{x}$ und $\sigma\ \circ\ \tilde{y} = \tilde{y}$.

Dann ist $\Phi(N)$ Untergruppe von Φ charakterisiert durch

$$\Phi(N) = \{\sigma\ \in\ \Phi\ /\ L(\lambda,\sigma)\ \equiv\ 0(N)\quad \text{und}\quad L(1-\lambda,\sigma)\ \equiv\ 0(N)\}\ .$$

Beweis:

Offensichtlich ist $\Phi(N)$ Untergruppe von Φ , so daß noch zu zeigen bleibt:

"$\subset$" :

Es gelte $\tilde{x} \circ \sigma = \tilde{x}$. Mit Satz 3.1 ergibt sich dann:

$$\tilde{x} = \xi^{L(\lambda,\sigma)}\tilde{x} \implies \xi^{L(\lambda,\sigma)} = 1$$

$$\implies e^{2\pi i \frac{L(\lambda,\sigma)}{N}} = 1 \implies$$

$$\implies 2\pi i \frac{L(\lambda,\sigma)}{N} \in 2\pi i \mathbb{Z} \iff \frac{L(\lambda,\sigma)}{N} \in \mathbb{Z} ,$$

d.h. $L(\lambda,\sigma) \equiv 0(N)$.

Analog folgt aus $\tilde{y} \circ \sigma = \tilde{y}$ auch $L(1-\lambda,\sigma) \equiv 0(N)$.

"$\supset$":

Nun gelte $L(\lambda,\sigma) \equiv 0(N)$ bzw. $L(1-\lambda,\sigma) \equiv 0(N)$, also

$$\xi^{L(\lambda,\sigma)} = e^{2\pi i \frac{L(\lambda,\sigma)}{N}} = 1 ,$$

und wegen $\frac{L(\lambda,\sigma)}{N} \in \mathbb{Z}$ sowie Satz 3.1 gilt $\tilde{x} \circ \sigma = \tilde{x}$. Völlig analog folgt $\tilde{y} \circ \sigma = \tilde{y}$.

□

Bevor nun die universelle Überlagerung von $F(N)'$ konstruiert wird, ist es angebracht, der freien Gruppe Φ mit Untergruppe $\Phi(N)$ einen eigenen Abschnitt zu widmen. Motiviert durch die folgenden Anwendungen, bildet dieser Abschnitt gleichzeitig das Fundament der Integrationstheorie (Berechnung der Perioden) bzw. der Matrixreduktion.

Die freie Gruppe Φ mit Untergruppe $\Phi(N)$

Satz (3.3):

Seien A und B Erzeugende von Φ . Man hat einen Homomorphismus $\Phi \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

$$A \longrightarrow (1,0) \quad , \qquad B \longrightarrow (0,1) \quad .$$

Es sei

$\alpha : \Phi \longrightarrow \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z}$ obiger Homomorphismus, gefolgt von der kanonischen Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z} \quad .$$

$$\text{Sei} \qquad \Phi(N) := \ker \alpha \quad .$$

Dann gilt:

$$\Phi(N) = \{C = A^{\nu_1} B^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot A^{\nu_k} B^{\mu_k} \in \Phi \,/\, \sum \nu_i \equiv \sum \mu_i \equiv 0(N)\} \quad .$$

Beweis:

"$\supset$":

Es ist

$$\begin{aligned}
\alpha(C) &= \alpha\ (A^{\nu_1} B^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot A^{\nu_k} B^{\mu_k}) \\
&= \alpha(A)^{\nu_1} \cdot \alpha(B)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \alpha(A)^{\nu_k} \cdot \alpha(B)^{\mu_k} \\
&= \alpha(A)^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \alpha(A)^{\nu_k} \cdot \alpha(B)^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot \alpha(B)^{\mu_k} \\
&= \alpha(A)^{\sum \nu_i} \cdot \alpha(B)^{\sum \mu_i} \\
&= 1 \cdot 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

"$\subset$":

Hier folgt aus

$\alpha(A)^{\sum \nu_i} \cdot \alpha(B)^{\sum \mu_i} = 1$ sofort $N \mid \sum \nu_i$ und $N \mid \sum \mu_i$.

$\square$

Satz (3.4):

Ist $\beta : \Phi \longrightarrow \mathbb{Z} / N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / N\mathbb{Z}$ irgendein surjektiver Homomorphismus, so gilt ker $\beta = \Phi(N)$; d.h.:
$\Phi(N)$ ist der eindeutig bestimmte Normalteiler von Φ mit

$$\Phi / \Phi(N) \simeq \mathbb{Z} / N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / N\mathbb{Z} .$$

Beweis:

"$\subset$"

Sei wieder $C = A^{\nu_1} B^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot A^{\nu_k} B^{\mu_k}$,

also

$$\beta(C) = \beta(A)^{\sum \nu_i} \cdot \beta(B)^{\sum \mu_i} .$$

A und B sind Erzeugende von Φ , damit erzeugen $\beta(A)$ und $\beta(B)$ $(\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^2$. Es gilt dann

$$\text{ord } \beta(A) = \text{ord } \beta(B) = N \quad .$$

Aus der Voraussetzung

$$\beta(A)^{\sum \nu_i} \cdot \beta(B)^{\sum \mu_i} = 1$$

folgt nun

$$N \mid \sum \nu_i \qquad \text{und} \qquad N \mid \sum \mu_i \quad .$$

"$\supset$" ist nach dem Gesagten jetzt trivial.

$\square$

Satz (3.5):

$\Phi(N)$ wird erzeugt von A^N und B^N sowie von der Kommutatoruntergruppe $\Phi^c = [\Phi\ ,\ \Phi]$.

Beweis:

Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1) Die von $[\Phi\ ,\ \Phi]$, A^N , B^N erzeugte Untergruppe $\mathcal{U}$ ist Normalteiler

2) $\Phi(N) = \mathcal{U}$

1) zu zeigen ist

$$g\,\mathcal{U}\,g^{-1} \in \mathcal{U} \qquad \text{für alle} \qquad g \in \Phi$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} gA^Ng^{-1} &= g\,(g^{-1}A^NA^{-N}g)\,A^Ng^{-1} \\ &= (gg^{-1})\,A^N\,(A^{-N}gA^Ng^{-1}) \\ &= A^N\,[A^{-N}, g] \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

Für B^N verläuft die Rechnung völlig analog.

Für $[\Phi\ ,\ \Phi]$ ergibt sich:

$$g(xyx^{-1}y^{-1})\,g^{-1} = gxyx^{-1}y^{-1}g^{-1}$$

$$= gxyg^{-1}gx^{-1}g^{-1}gy^{-1}g^{-1}$$

$$= gxg^{-1}gyg^{-1}\,(gxg^{-1})^{-1}\,(gyg^{-1})^{-1}$$

$$= [gxg^{-1}\,,\,gyg^{-1}] \in \mathcal{U} \quad .$$

2) $\Phi(N) = \mathcal{U}$

a) $\Phi(N) \subset \mathcal{U}$

Ein Wort C war gegeben durch

$$C = A^{\nu_1}\,B^{\mu_1} \cdot \ldots \cdot A^{\nu_k}\,B^{\nu_k} \quad .$$

Seien nun die ersten vier Buchstaben des Wortes C gegeben durch A^{ν} , B^{μ} , A^{κ} und B^{λ} ,

$$\text{d.h.} \qquad C = A^{\nu}\,B^{\mu}\,A^{\kappa}\,B^{\lambda} \cdot \ldots \cdot A^{\nu_k}\,B^{\mu_k} \,.$$

Betrachtet werden jetzt die ersten 4 Buchstaben:

$$\tilde{C} = A^{\nu}\,B^{\mu}\,A^{\kappa}\,B^{\lambda} \quad .$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= A^{\nu}\,B^{\mu}\,A^{-\nu}\,A^{\kappa+\nu}\,B^{\lambda} \\ &= A^{\nu}\,B^{\mu}\,A^{-\nu}\,B^{-\mu}\,B^{\mu}\,A^{\kappa+\nu}\,B^{\lambda} \\ &= [A^{\nu}\,,\,B^{\mu}]\,B^{\mu}\,A^{\kappa+\nu}\,B^{\lambda} \quad , \end{aligned}$$

d.h. $[A^{\nu}\,,\,B^{\mu}]^{-1} \cdot \tilde{C}$ ist ein Wort mit mindestens um 1 reduzierter Länge.

Nun werden die letzten drei Buchstaben B^{μ} , $A^{\kappa+\nu}$, B^{λ} betrachtet.

Mit $\alpha := \mu$, $\beta := \kappa + \nu$ und $\gamma := \lambda$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} B^{\alpha} A^{\beta} B^{\gamma} &= B^{\alpha} A^{\beta} B^{-\alpha} B^{\alpha+\gamma} \\ &= B^{\alpha} A^{\beta} B^{-\alpha} A^{\beta} A^{-\beta} B^{\alpha+\gamma} \\ &= [B^{\alpha} A^{\beta}] A^{-\beta} B^{\alpha+\gamma} \quad . \end{aligned}$$

Sukzesssives Anwenden dieses Verfahrens auf eine beliebige Wortlänge ergibt dann die Darstellung

$$C = F \cdot A^{\delta} B^{\varepsilon} \quad .$$

Dabei ist F ein Produkt von Kommutatoren und für δ und ε gilt

$$\delta \equiv \varepsilon \equiv 0(N) \quad .$$

Die Inklusion $\mathcal{U} \subset \Phi(N)$ ist klar.

$\square$

Satz (3.6):

$\Phi(N)$ wird auch erzeugt von A^N , B^N sowie allen $\gamma\, ABA^{-1} B^{-1} \gamma^{-1}$, $\gamma \in \Phi$, also

$$\begin{aligned} \Phi(N) &= < [\Phi \, , \, \Phi] \, , \, A^N, \, B^N > \\ &= < \gamma \, [A \, , \, B] \, \gamma^{-1}, \, A^N, \, B^N > \end{aligned}$$

Beweis:

Sei jetzt $\mathcal{U}$ die von A^N, B^N, $\gamma ABA^{-1} B^{-1} \gamma^{-1}$ erzeugte Untergruppe. Wie noch gezeigt wird, ist $\mathcal{U}$ Normalteiler. Weil dann $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{A}^{-1} \tilde{B}^{-1} = 1$ in $\Phi/\mathcal{U}$ ist, ist die Faktorgruppe $\Phi/\mathcal{U}$ abelsch.

Also gilt $[\Phi \, , \, \Phi] \subset \mathcal{U}$ und mit der Voraussetzung A^N, $B^N \in \mathcal{U}$ folgt $\Phi(N) \subset \mathcal{U}$.

Es muß also noch gezeigt werden: $\mathcal{U}$ ist Normalteiler.

Es reicht zu zeigen, daß
$\gamma A^N \gamma^{-1}$ und $\gamma B^N \gamma^{-1}$ wieder in $\mathcal{U} = < \gamma ABA^{-1} B^{-1} \gamma^{-1}, A^N, B^N >$ liegen.

Jetzt werden folgende Fundamentalrelationen betrachtet, die in jeder Gruppe gelten.

(*)
$$C^{k+1} D C^{-(k+1)} D^{-1} = CC^k D C^{-k} D^{-1} C^{-1} CDC^{-1} D^{-1}$$

(**)
$$CD^{k+1} C^{-1} D^{-(k+1)} = \underbrace{CDC^{-1} D^{-1}} D \underbrace{CD^k C^{-1} D^{-k}} D^{-1}$$

Nun gilt

$$\gamma A^N \gamma^{-1} = (\gamma A^N \gamma^{-1} A^{-N}) A^N \quad .$$

Man reduziert jetzt $\gamma A^N \gamma^{-1} A^{-N}$ mit Hilfe von (**) zu einem Produkt von Konjugierten der Form $\alpha A \alpha^{-1} A^{-1}$ $(***)$.

1. Fall: $\alpha = BA$

α eingesetzt in (***) ergibt:

$$BAAA^{-1} B^{-1} A^{-1} = BAB^{-1} A^{-1} = [B , A] \quad .$$

2. Fall: $\alpha = BA^{-1}$

$$\begin{aligned}\alpha\, A\, \alpha^{-1}\, A^{-1} &= BA^{-1}\, A\, AB^{-1}\, A^{-1}\\ &= BA\, B^{-1}\, A^{-1} = [B\,,\, A]\quad .\end{aligned}$$

3. Fall: $\alpha = BB$

$$\begin{aligned}\alpha\, A\, \alpha^{-1}\, A^{-1} &= BBAB^{-1}\, B^{-1}\, A^{-1}\\ &= BBAB^{-1}\, (A^{-1}\, B^{-1}\, BA)\, B^{-1}\, A^{-1}\\ &= BBAB^{-1}\, A^{-1}\, B^{-1}\, (BA\, B^{-1}\, A^{-1})\\ &= (BABA^{-1}\, B^{-1}\, B^{-1})^{-1}\, BAB^{-1}\, A^{-1}\\ &= \tilde{A}\, [B\,,\, A]\\ \text{mit}\quad \tilde{A} : &= (BABA^{-1}\, B^{-1}\, B^{-1})^{-1}\quad .\end{aligned}$$

4. Fall: $\alpha = BB^{-1}$

$$\begin{aligned}\alpha\, A\, \alpha^{-1}A^{-1} &= BB^{-1}\, A\, (BB^{-1})^{-1}\, A^{-1}\\ &= BB^{-1}\, ABB^{-1}\, A^{-1}\\ &= BB^{-1}\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, AB^{-1}\, A^{-1}\\ &= (BAB^{-1}\, A^{-1}\, BB^{-1})^{-1}\, BAB^{-1}\, A^{-1}\\ &= (BB^{-1}\, BAB^{-1}\, A^{-1}\, BB^{-1})^{-1}\cdot [B\,,\, A]\\ &= (BB^{-1}\, (ABA^{-1}\, B^{-1})^{-1}\, (BB^{-1})^{-1})^{-1}\cdot [B\,,\, A]\\ &= BB^{-1}\, (ABA^{-1}\, B^{-1})\, (BB^{-1})^{-1}\, [B\,,\, A]\\ &= [A\,,\, B]\, [B\,,\, A]\quad .\end{aligned}$$

Es wird also die "Länge von B " abgebaut. Dieses Verfahren wird dann mit einer neuen Anwendung auf $[B\,,\, A] = BAB^{-1}\, A^{-1}$ fortgesetzt.

□

Satz 3.7

Die Elemente A^N , B^N , $\rho\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \rho^{-1}$, wobei ρ aus einem Vertretersystem für die Rechtsnebenklassen von $\Phi(N)$ in Φ gewählt ist, erzeugen $\Phi(N)$ modulo $\Phi(N)^c$, d.h. ihre Bilder $\Phi(N)\ /\ \Phi(N)^c$.

Beweis :

Aus Satz 3.6 ist bekannt

$$\Phi(N) \ = < \ A^N \ , \ B^N \ , \ \gamma\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \gamma^{-1} \ / \ \gamma \in \Phi \ > \quad .$$

Es reicht zu zeigen:
Jedes Element $\gamma\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \gamma^{-1}$ kann man als $\sigma\, \rho\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \rho^{-1}\, \sigma^{-1}$ mit $\sigma \in \Phi(N)$ schreiben.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} \gamma\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \gamma^{-1} &= \sigma\, \rho\, ABA^{-1}\, B^{-1}\, \rho^{-1}\, \sigma^{-1} = \sigma\, \phi\, \sigma^{-1} \\ &= \sigma\, \phi\, \sigma^{-1}\, \phi^{-1}\, \phi = [\sigma\, ,\, \phi]\, \phi \end{aligned}$$

mit $\phi := \rho\, [A\, ,\, B]\, \rho^{-1}$ und aus $[A\, ,\, B] \in \Phi(N)$ folgt $\rho\, [A\, ,\, B]\, \rho^{-1} \in \Phi(N)$.

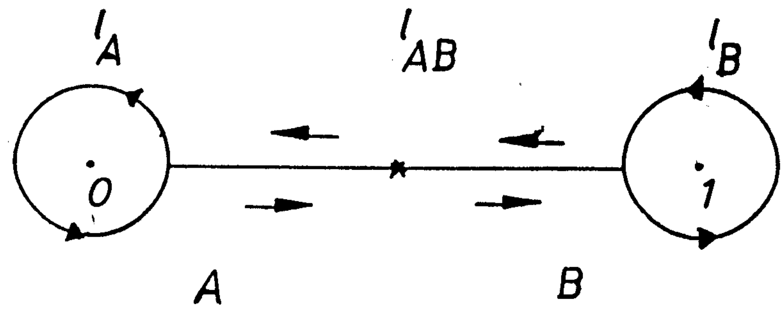
Bemerkung:

$\{A^j\ B^k\}$ oder auch $\{A^j\ (AB)^k\}$, $0 \le j\ ,\ k \le N-1$ ist ein solches Vertretersystem.

$\square$

Für die weiteren Anwendungen werden die Erzeugenden A und B wie folgt präzisiert.

Die kanonische Identifikation Φ mit der Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ von $\mathbb{C} - \{0,1\}$ soll A auf eine Wegeklasse abbilden, die den Punkt 0 genau einmal aber nicht den Punkt 1 umläuft. Analoges gilt für B mit vertauschten Rollen von 0 und 1. Die Umläufe sind im mathematisch positiven Sinn gemeint. Die Skizze illustriert die vorliegende Situation.



Nun wird die universelle Überlagerung $p : \mathcal{U} \longrightarrow F(N)'$ von $F(N)'$ konstruiert.

Satz (3.8):

Die Abbildung $p : \mathcal{U} \longrightarrow F(N)'$

$$p(\tau) = (\tilde{x}(\tau), \tilde{y}(\tau), 1)$$

ist die universelle Überlagerung von $F(N)'$ mit $\Phi(N)$ als Decktransformationsgruppe bzgl. p.

Beweis:

Wegen

$$\tilde{x}(\tau)^N + \tilde{y}(\tau)^N = \lambda(\tau) + (1-\lambda)(\tau) = 1$$

ist p wohldefiniert.

Die Abbildung p ist holomorph, weil die Koordinatenfunktionen $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ und 1 holomorph sind. Trivialerweise ist p nicht konstant, also ist p Überlagerung.

Außerdem ist p surjektiv. Sei dazu $(X, Y, 1) \in F(N)'$. Nach Konstruktion von $F(N)'$ gilt $X^N \notin \{0,1\}$.

Da $\lambda : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{C} - \{0,1\}$ die universelle Überlagerung von $\mathbb{C} - \{0,1\}$ ist, gibt es ein $\tau \in \mathcal{U}$ mit $\lambda(\tau) = X^N$.

Wegen $(X,Y,1) \in F(N)$ gilt

$$1 - \lambda(\tau) = 1 - X^N = Y^N \quad .$$

Es existieren N-te Wurzeln mit

$$(\lambda(\tau))^{\frac{1}{N}} = \tilde{x}(\tau) = (X^N)^{\frac{1}{N}} = \xi^j X$$

für $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ sowie

$$((1-\lambda)(\tau))^{\frac{1}{N}} = \tilde{y}(\tau) = (Y^N)^{\frac{1}{N}} = \xi^k Y$$

für $k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Wählt man jetzt $\sigma \in \Phi$ mit

$$L(\lambda,\sigma) = -j \qquad \text{und} \qquad L(1-\lambda,\sigma) = -k,$$

so folgt

$$\begin{aligned}(\tilde{x}(\sigma\tau), \tilde{y}(\sigma\tau), 1) &= (\xi^{L(\lambda,\sigma)}\, \tilde{x}(\tau), \xi^{L(1-\lambda,\sigma)}\, \tilde{y}(\tau), 1) \\ &= (\xi^{-j}\, \xi^j X, \xi^{-k}\, \xi^k Y, 1) = (X,Y,1) \quad ,\end{aligned}$$

also ist $p : \mathcal{U} \longrightarrow F(N)'$ surjektiv.

Zu zeigen bleibt noch

Satz (3.9):

Sei $\sigma \in \Phi$ und $j,k \in \{0, \ldots, N-1\}$.

Dann kann man σ so wählen, daß $L(\lambda,\sigma) = -j$ und $L(1-\lambda,\sigma) = -k$ gilt.

Beweis:

Nach dem bisher Gesagten über die Erzeugenden A und B kann man offentsichlich

$$L(\lambda, A) = 1 \quad , \qquad L(1-\lambda, A) = 0$$
$$L(\lambda, B) = 0 \quad , \qquad L(1-\lambda, B) = 1$$

wählen.

Man erhält also

$$L(\lambda, A^j) = j \quad , \qquad L(1-\lambda, A^j) = 0$$
$$L(\lambda, B^k) = 0 \quad , \qquad L(1-\lambda, B^k) = k$$

und damit

$$L(\lambda, A^j B^k) = j+k$$
$$L(1-\lambda, A^j B^k) = k \quad .$$

Sei jetzt $(s,r) \in \mathbb{Z}^2$ und o.B.d.A. $S < r$ mit $k := r$ sowie $j := s - r$.

Dann gilt:

$$L(\lambda, A^j B^k) = r + s - r = s$$

bzw.

$$L(1-\lambda, A^j B^k) = k = r \quad .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \Phi &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ \sigma &\longrightarrow (L(\lambda, \sigma), L((1-\lambda, \sigma)) \end{aligned}$$

ist ein Epimorphismus.

Trivialerweise ist dann auch die Abbildung

$$\begin{aligned} \bar{S} : \Phi &\longrightarrow (\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^2 \\ \sigma &\longrightarrow (L(\lambda, \sigma) + N\mathbb{Z}, L(1-\lambda, \sigma) + N\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

surjektiver Homomorphismus.

Aus Satz 3.4 folgt jetzt, daß $\ker \bar{S} = \Phi(N)$ gilt, d.h. $\Phi(N)$ ist der eindeutig bestimmte Nomalteiler von Φ mit

$$\Phi / \Phi(N) \cong (\mathbb{Z} / N\mathbb{Z})^2 \quad .$$

$\square$

Bevor nun sukzessive alle für die Matrixreduktion benötigten logarithmischen Symbole (Perioden) berechnet werden, soll noch einmal auf die (schon eingangs erwähnte) neue Situation aufmerksam gemacht werden. Im folgenden bezieht sich das Symbol $L(f, \sigma)$ immer auf die Überlagerung p und $f \in E(S)$, $S = F(N) - F(N)'$.

Das Diagramm illustriere die Situation.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "\lambda"'] & F(N)' \arrow[r, hook] \arrow[d, "p'"] & F(N) \arrow[d] \\
 & \mathbb{C} - \{0,1\} = F(1)' \arrow[r, hook] & F(1)
\end{tikzcd}$$

Zum Normalteiler $\Phi(N)$ korrespondiert die Zwischenüberlagerung
$p : \mathcal{U} \longrightarrow F(N)'$, zu $\Phi \,/\, \Phi(N) \cong \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z}$
die Überlagerung $p' : F(N)' \longrightarrow F(1)'$ vom Grade N^2.

Weiterhin gilt nach Definition von p:

$$\tilde{x} = x \circ p \quad \text{und} \quad \tilde{y} = y \circ p \quad .$$

Mit $\sigma \in \Phi\,(N)$ folgt dann:

$$L\,(x^N,\sigma) = L\,(x^N \circ p,\sigma) = \int_z^{\sigma z} d\,\log x^N \circ p =$$
$$= \int_z^{\sigma z} d\,\log \tilde{x}^N = \int_z^{\sigma z} d\,\log\,\lambda$$

sowie

$$L\,(\lambda,\sigma) = L\,(id \circ \lambda,\sigma) = \int_z^{\sigma z} d\,\log\,id \circ \lambda = \int_z^{\sigma z} d\,\log\,\lambda\,,$$

also

$$L\,(x^N,\sigma) = L\,(\lambda,\sigma) \quad .$$

Wegen $N L\,(x,\sigma) = L\,(x^N,\sigma)$ gilt

$$L\,(x,\sigma) = \frac{1}{N}\,L\,(\lambda,\sigma) \quad .$$

Weiterhin ist

$$L\,(\tilde{x},\sigma) = L\,(x \circ p,\sigma) = L\,(x,\sigma) \quad ,$$

somit

$$L\,(x,\sigma) = \frac{1}{N}\,L\,(\lambda,\sigma) = L\,(\tilde{x},\sigma) \quad ,$$

d.h. es genügt $L\,(\tilde{x},\sigma)$ zu berechnen.

Analoges gilt für $L(\tilde{y},\sigma)$, deshalb wird im folgenden x bzw. y für $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ notiert.

Jetzt wird sich herausstellen, daß gilt:

$$
\begin{aligned}
&L\,(x, ABA^{-1}\,B^{1}) \;=\; L\,(y, ABA^{-1}\,B^{-1}) \;=\; 0\,. \\
&L\,(x, A^{N}) \;=\; 1\,, \qquad L\,(y; A^{N}) \;=\; 0\,, \\
&L\,(x, B^{N}) \;=\; 0\,, \qquad L\,(y, B^{N}) = 1\,, \\
&L\,(x-\xi^{j}, ABA^{-1}\,B^{-1}) = \begin{cases} -1 & j=0 \\ 1 & j=1 \\ 0 & 2 \le j \le N-1\,, \end{cases} \\
&L\,(x-\xi^{j}, A^{N}) \;=\; 0\,, \\
&L\,(x-\xi^{j}, B^{N}) = \begin{cases} N & j=0 \\ 0 & 1 \le j \le N-1\,, \end{cases} \\
&L\,(y-\xi^{j}, ABA^{-1}\,B^{-1} = \begin{cases} 1 & j=0 \\ -1 & j=1 \\ 0 & 2 \le j \le N-1\,, \end{cases} \\
&L\,(y-\xi^{j}, A^{N}) = \begin{cases} N & j=0 \\ 0 & 1 \le j \le N-1\,, \end{cases} \\
&L\,(y-\xi^{j}, B^{N}) \;=\; 0\,, \\
&L\,(x-\varepsilon\,\xi^{j}\,y, ABA^{-1}\,B^{-1}) = \begin{cases} -1 & j=0 \\ 0 & 1 \le j \le N-2 \\ 1 & j=N-1\,, \end{cases} \\
&L\,(x-\varepsilon\,\xi^{j}\,y, A^{N}) \;=\; 0\,, \\
&L\,(x-\varepsilon\,\xi^{j}\,y, B^{N}) \;=\; 0\,.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Allerdings müssen noch einige Vorbereitungen getroffen werden.

Bei der Berechnung von $L\,(x-\xi^j,\ ABA^{-1}\,B^{-1})$ kann man nicht die "volle" Linearität von L ausnutzen, weil A bzgl. der Überlagerung $x-\xi^j$ keine Decktransformation ist; dies ist nur bei ABA^{-1}, B und B^{-1} möglich, genauer:

Es liegt folgende Situation vor.

Die Überlagerung λ hat eine Faktorisierung $\lambda = x \circ p$. Es gilt dabei $\lambda = (x \circ p)^N$ und $1-\lambda = (y \circ p)^N$. Zur Überlagerung p gehört die Decktransformationsgruppe $\Phi\,(N)$. Da x und y Funktionen auf $F(N)'$ bzw. $F(N)$ sind, kann man auch nur die Additivität für $\sigma's$ aus $\Phi\,(N)$ benutzen. Ansonsten ist die noch zu beweisende Gleichung $L\,(f,\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1}) = L\,(f \circ \gamma,\sigma)$, $f \in$ "(2.2)" , $\gamma \in \Phi$ anzuwenden.

Deshalb wird gezeigt:

Satz (3.11):

Sei f aus (2.2) , $\sigma \in \Phi\,(N)$ und $\gamma \in \Phi$. Dann gilt: $\gamma\,\sigma\,\gamma^{-1} \in \Phi\,(N)$ sowie

i) $\quad x \circ \gamma = \xi^{L(\lambda,\gamma)}x$

ii) $\quad y \circ \gamma = \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}y$

iii) $\quad (x-\xi^j) \circ \gamma = \xi^{(\lambda,\gamma)}\,(x-\xi^{j-L(\lambda,\gamma)})$

iv) $\quad (y-\xi^j) \circ \gamma = \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}\,(y-\xi^{j-L(1-\lambda,\gamma)})$

v) $\quad (x-\varepsilon\,\xi^j\,y) \circ \gamma = \xi^{L(\lambda,\gamma)}\,(x-\varepsilon\,\xi^{j-L(\lambda,\gamma)+L(1-\lambda,\gamma)}y)$,

d.h. wenn $f \in$ "(2.2)" und $\gamma \in \Phi$, so unterscheidet sich $f \circ \gamma$ von f nur um eine multiplikative Konstante $c \in \mathbb{C}^*$.

Beweis:

Aus Satz 3.5 folgt sofort $\gamma \; \sigma \; \gamma^{-1} \in \Phi \; (N)$, was aber auch wie folgt einzusehen ist:

$$L\,(\lambda, \gamma\sigma\gamma^{-1}) \; = \; L\,(\lambda,\gamma) + L\,(\lambda,\sigma) - L\,(\lambda,\gamma) \; = \; L\,(\lambda,\sigma) \; \equiv \; 0\,(N)\,.$$

Die Behauptungen i) und ii) wurden schon in Satz 3.1 gezeigt.

Nun gilt weiter:

iii) $$(x - \xi^j) \circ \gamma \; = \; x \circ \gamma - \xi^j \; = \; \xi^{L(\lambda,\gamma)}\; x - \xi^j$$
$$= \; \xi^{L(\lambda,\gamma)}\; (x - \xi^{j-L(\lambda,\gamma)})$$

iv) $$(y - \xi^j) \circ \gamma \; = \; y \circ \gamma - \xi^j \; = \; \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}\; y - \xi^j$$
$$= \; \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}\; (y - \xi^{j-L(1-\lambda,\gamma)})$$

v) $$(x - \varepsilon\, \xi^j y) \circ \gamma \; = \; x \circ \gamma - \; \varepsilon\, \xi^j y \circ \gamma$$
$$= \; \xi^{L(\lambda,\gamma)}\; x - \varepsilon\; \xi^j\; \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}\; y$$
$$= \; \xi^{L(\lambda,\gamma)}\; (x - \varepsilon\; \xi^{j-L(x,\gamma)+L(1-\lambda,\gamma)}\; y)$$

□

Korollar (3.12):

Unter den Voraussetzungen von Satz (3.11) gilt:

i) $$L\,(f, \gamma\; \sigma\; \gamma^{-1}) \; = \; L\,(f \circ \gamma, \sigma)$$

ii) $$L\,(c\; f,\; \sigma) \; = \; L\,(f, \sigma)\,, \quad c \in \mathbb{C}^*$$

Beweis:

i) $$L(f \circ \gamma, \sigma) = \int_{z}^{\sigma z} \frac{d(f \circ \gamma)}{f \circ \gamma} = \int_{\gamma^{-1} z}^{\sigma \gamma^{-1} z} \frac{d(f \circ \gamma)}{f \circ \gamma}$$

$$= \int_{\gamma^{-1} z}^{\sigma \gamma^{-1} z} \gamma^* \left(\frac{d\,f}{f}\right) = \int_{z}^{\gamma \sigma \gamma^{-1} z} \frac{d\,f}{f} = L(f, \gamma \circ \gamma^{-1})$$

Es ist klar, daß $f \circ \gamma$ ein Element von $E(S)$ ist, denn es gilt

$$f \circ \gamma \circ \sigma = f \circ \gamma \sigma \gamma^{-1} \circ \gamma = f \circ \gamma$$

ii) trivial

□

In Satz (3.6) wurde gezeigt, daß $\Phi(N)$ von $\gamma ABA^{-1} B^{-1} \gamma^{-1}$, $\gamma \in \Phi$ und A^N, B^N erzeugt wird. Wegen $ABA^{-1} B^{-1}$, A^N, $B^N \in \Phi(N)$ kann man aufgrund von Korollar (3.12) für beliebiges $f \in$ (2.2) und $\sigma \in \Phi(N)$ das logarithmische Symbol $L(f, \sigma)$ berechnen, wenn man $L(f, ABA^{-1} B^{-1})$, $L(f, A^N)$ und $L(f, B^N)$ kennt.

Satz (3.13):

Für $A, B \in \Phi$ gilt:

i) $L(x, ABA^{-1} B^{-1}) = L(y, ABA^{-1} B^{-1}) = 0$

ii) $L(x, A^N) = 1$

iii) $L(x, B^N) = 0$

iv) $L(y, A^N) = 0$

v) $L(y, B^N) = 1$

Beweis:

i) A und B sind Erzeugende von Φ mit
$L(\lambda, A) = 1 \quad , \quad L(1-\lambda, A) = 0 \quad ,$ d.h. es ist

$$L(x,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) = \tfrac{1}{N}\,L(\lambda,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) = 0 \quad ,$$

da $ABA^{-1}\,B^{-1}$ Kommutator ist. Völlig analog ergibt sich

$$L(y,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) = \tfrac{1}{N}\,L(\lambda,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) = 0 \quad .$$

ii) $L(x, A^N) = N L(x, A) = L(x^N, A) = L(\lambda, A) = 1$

iii) $L(x, B^N) = N L(x, B) = L(x^N, B) = L(\lambda, B) = 0$

iv) $L(y, A^N) = N L(y, A) = L(y^N, A) = L(1-\lambda, A) = 0$

v) $L(y, B^N) = N L(y, B) = L(y^N, B) = L(1-\lambda, B) = 1$

□

Nun erfolgen einige grundsätzliche Betrachtungen zur Berechnung von $L(x-\xi^j, \sigma)$, $L(y-\xi^j, \sigma)$ und $L(x-\xi^j y, \sigma)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} L\left(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j, \sigma\right) + L(y, \sigma) &= L\left(y\left(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j\right), \sigma\right) \\ &= L\left(x - \varepsilon\,\xi^j\,y, \sigma\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Für $\sigma \in \{A^N,\ B^N,\ ABA^{-1}\,B^{-1}\}$ ist $L(y,\sigma)$ bekannt, so daß noch $L(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j, \sigma)$ zu berechnen ist.

Definition (3.15):

Für $\sigma \in \Phi$ sei

$$U_1 := \{\sigma \in \Phi \,/\, L(\lambda,\sigma) \equiv 0\,(N)\} \quad ,$$

$$U_2 := \{\sigma \in \Phi \,/\, L(1-\lambda,\sigma) \equiv 0\,(N)\} \quad ,$$

$$U_3 := \{\sigma \in \Phi \,/\, L(\lambda,\sigma) - L(1-\lambda) \equiv 0\,(N)\} \quad .$$

Weil $L(x,\cdot)$ und $L(1-\lambda,\cdot)$ Homomorphismen von Φ nach $\mathbb{Z} \,/\, N\mathbb{Z}$ sind, sind U_1, U_2 bzw. U_3 Normalteiler in Φ .

Die Einführung dieser Gruppen geschieht deshalb, da A bzgl. der Überlagerung $x - \xi^j$ keine Decktransformation ist. Diese Problematik wurde schon besprochen.

Satz (3.16):

Es gilt:

i) $\quad x = x \circ \sigma \qquad \forall\, \sigma \in U_1$

ii) $\quad y = y \circ \sigma \qquad \forall\, \sigma \in U_2$

iii) $\quad \frac{x}{y} = \frac{x}{y} \circ \sigma \qquad \forall\, \sigma \in U_3$

Beweis:

$$\text{i)} \qquad x \circ \sigma = \xi^{L(\lambda,\sigma)} x = e^{\frac{2\pi i}{N} L(\lambda,\sigma)}\, x = 1 \cdot x = x$$

$$\text{ii)} \qquad y \circ \sigma = \xi^{l(1-\lambda,\sigma)}\, y = e^{2\pi i \, \frac{L(1-\lambda,\sigma)}{N}}\, y = 1 \cdot y = y$$

$$\text{iii)} \quad \frac{x}{y} \circ \sigma = \frac{x \circ \sigma}{x \circ \sigma} = \frac{\xi^{L(\lambda,\sigma)}\, x}{\xi^{L(1-\lambda,\sigma)}\, y} = \xi^{L(\lambda,\sigma)-L(1-\lambda,\sigma)}\, \frac{x}{y}$$

$$= e^{2\pi i \cdot \frac{L(\lambda,\sigma)-L(1-\lambda,\sigma)}{N}}\, \frac{x}{y} = 1 \cdot \frac{x}{y} = \frac{x}{y}$$

Aus Satz (3.16) folgt sofort (3.17) :

$$\text{i)} \quad (x - \xi^j) \circ \sigma = x \circ \sigma - \xi^j = x - \xi^j \qquad \forall\, \sigma \in U_1$$

$$\text{ii)} \quad (y - \xi^j) \circ \sigma = y \circ \sigma - \xi^j = y - \xi^j \qquad \forall\, \sigma \in U_2$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j\right) \circ \sigma = \frac{x}{y} \circ \sigma - \varepsilon\, \xi^j = \frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j \qquad \forall\, \sigma \in U_3$$

Jetzt werden die Perioden

$$L\,(x - \xi^j\,,\, ABA^{-1}\, B^{-1}\,, \qquad L\,(y - \xi^j\,,\, ABA^{-1}\, B^{-1}) \quad \text{und}$$

$$L\,\left(\tfrac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j\,,\, ABA^{-1}\, B^{-1}\right) \qquad \text{betrachtet.}$$

Ziel wird es zuerst sein, einfachere Ausdrücke zu finden, die leichter zu berechnen sind.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
& L\,(x - \xi^j,\, ABA^{-1}\, B^{-1}) \\
&= L\,(x - \xi^j,\, ABA^{-1}) + L\,(x - \xi^j\,,\, B^{-1}) \\
&= L\,((x - \xi^j) \circ A, B) + L\,(x - \xi^j\,,\, B^{-1}) \\
&= L\,((x - \xi^j) \circ A, B) - L\,(x - \xi^j\,,\, B) \\
&= L\,(\xi^{L(\lambda,A)}\,(x - \xi^{j-L(\lambda,A)}),\, B) - L\,(x - \xi^j\,,\, B) \\
&= L\,(x - \xi^{j-1},\, B) - L\,(x - \xi^j,\, B)
\end{aligned}$$

$$L\,(y-\xi^j,\ ABA^{-1}\ B^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ +\ L\,(\gamma-\xi^j,\ BA^{-1}\ B^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ +\ L\,(\gamma-\xi^j,\ BA^{-1}\ B^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ +\ L\,((y-\xi^j)\ \circ\ B,\ A^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ +\ L\,\left(\xi^{L(1-\lambda,B)}\ \left(y-\xi^{j-L(1-\lambda,B)}\right)\ ,\ A^{-1}\right)$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ +\ L\,(y-\xi^{j-1},\ A^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^j,\ A)\ -\ L\,(y-\xi^{j-1},\ A)$$

$$L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ ABA^{-1}B^{-1})$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ +\ L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ A^{-1}\ B^{-1})$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon^j,\ AB)\ +\ L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ B\ (AB)^{-1})\ B^{-1})$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ +\ L\,((\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j)\ \circ\ B,\ AB)$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ -\ L\,(\tfrac{1}{y}\ (x-\varepsilon\,\xi^j)\ \circ\ B,\ AB)$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ -\ L\,(\tfrac{1}{y}\ \xi^{L(\lambda,B)}\ (x-\varepsilon\,\xi^{j-L(\lambda,B)+L(1-\lambda,B)}\ y)\ ,\ AB)$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)-L\,(\tfrac{1}{y}\ \xi\ (x-\varepsilon\,\xi^{j+1}\ y)\ ,\ AB)$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ -\ L\,(\xi\ (\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^{j+1})\ ,\ AB)$$

$$= L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB)\ -\ L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^{j+1},\ AB)$$

Insgesamt gilt also:

$$L\,(x-\xi^j,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) \ = \ L\,(x-\xi^{j-1},\ B) \ - \ L\,(x-\xi^j,\ B)$$

$$L\,(y-\xi^j,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) \ = \ L\,(y-\xi^j,\ A) \ - \ L\,(y-\xi^{j-1},\ A)$$

$$L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ ABA^{-1}\,B^{-1}) \ = \ L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^j,\ AB) \ - \ L\,(\tfrac{x}{y}-\varepsilon\,\xi^{j+1},\ AB)$$

(3.18)

Bevor nun $L\,(x-\xi^j,\ B)$ berechnet wird, zuerst eine Vorbemerkung.

Man setzt:

$$w^N \ = \ z \quad \text{auf} \quad \mathbb{C}-(-\infty,0] \quad \text{mit} \quad w\,(1) \ = \ 1 \quad .$$

Nun gilt:

$$x^N \ = \ \lambda^*\,w^N \ = \ (w\circ\lambda)^N \ \Longrightarrow \ x \ = \ \xi^k\,(w\circ\lambda) \quad .$$

Es wird also x so gewählt, daß $x=\lambda^*\,w=w\circ\lambda$ und $w^N=z$ (auf $\mathbb{C}$) mit $w\,(1)=1$ gilt.

Wählt man eine andere Normaldarstellung, so kann in den Ergebnissen (Perioden) und damit in der Matrixreduktion eine Einheitswurzel ξ^k erscheinen, die aber mit der gerade getroffenen Wahl vermieden wird.

Es ist jetzt:

$$L\,(x-\xi^j,\ B) \ = \ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u_0}^{Bu_0}\frac{dx}{x-\xi^j}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u_0}^{Bu_0} \frac{\lambda^* (dz)}{N \ x^{N-1} (x - \xi^j)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i N} \int\limits_{u_0}^{Bu_0} \frac{\lambda^* \ dz}{\lambda^* (w^{N-1} (w - \xi^j))}$$

$$= \frac{1}{2\pi i N} \int\limits_{l_B} \frac{dz}{w^{N-1} (w - \xi^j)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i N} \int\limits_{l_B} \frac{w}{z} \frac{dz}{(w - \xi^j)} \quad .$$

Offensichtlich ist das Integral im Falle $j \neq 0$ gleich Null, denn der Wert ξ^j wird nur für $j = 0$, also für $\xi^j = 1$ angenommen.

Für $j = 0$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi i N} \int\limits_{l_B} \frac{w}{z} \frac{dz}{(w - \xi^j)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i N} \int\limits_{l_B} \frac{w \ (w^{N-1} + w^{N-2} + \ \dots \ + w + 1)}{z} \ \frac{dz}{z-1}$$

$$= \frac{w \ (w^{N-1} + w^{N-2} + \ \dots \ + w + 1)}{N z} \ \Big|_{z=1} \cdot \operatorname{Res} \frac{1}{(Z-1)}$$

$$= 1 \quad .$$

Insgesamt hat man damit

$$L\,(x - \xi^j, B) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = 0 \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad .$$

Völlig analog erfolgt dann die Berechnung von $L\ (y - \xi^j, A)$, d.h. es gilt

$$L\ (y - \xi^j, A) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = 0 \\ 0 & 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad .$$

Offensichtlich gilt dann auch

$$L\ (x - \xi^j, B^N) = \begin{cases} N & \text{für} \quad j = 0 \\ 0 & \text{für } 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

sowie

$$L\ (y - \xi^j, A^N) = \begin{cases} N & \text{für} \quad j = 0 \\ 0 & \text{für} \quad 1 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad ,$$

da der Komposition von Decktransformationen der Multiplikation der Homotopieklassen entspricht. Die Wege werden dann mit N -facher Geschwindigkeit durchlaufen. Als weitere Konsequenz nach Wahl der Erzeugenden ergibt sich demnach

$$L\ (x - \xi^j, A^N) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad L\ (y - \xi^j, B^N) = 0 \quad .$$

Mit Hilfe von (3.18) folgt

$$L\ (x - \xi^j,\ ABA^{-1}\ B^{-1}) = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad j = 0 \\ 1 & \text{für} \quad j = 1 \\ 0 & \text{für} \quad 2 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad .$$

Völlig analog berechnet man

$$L\ (y - \xi^j,\ ABA^{-1}\ B^{-1}) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad j = 0 \\ -1 & \text{für} \quad j = 1 \\ 0 & \text{für} \quad 2 \leq j \leq N-1 \end{cases} \quad .$$

Es folgt die Berechnung von $L\left(\frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j, AB\right)$. Man wählt w holomorph auf $\mathbb{C} - [0,1]$ mit $w^N = \frac{z}{1-z}$ und $w\,(\infty) = \varepsilon$, $\lambda^* w = \frac{x}{y}$. Es gilt dann $w^N(\infty) = -1$ und $(\lambda^* w)^N = (\frac{x}{y})^N$. Unter Beachtung von $dz = -z^2 d\,(\frac{1}{z})$ und $N w^{N-1}\, dw = d\,(\frac{z}{1-z}) = \frac{dz}{(1-z)^2}$ erhält man

$$
\begin{aligned}
& L\,(\frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j,\ AB) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{u_0}^{ABu_0} \frac{d\,(\frac{x}{y})}{\frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{AB}} \frac{dw}{w - \varepsilon\, \xi^j} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{AB}} \frac{w dz}{N z\,(1-z)\,(w - \varepsilon\, \xi^j)} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{AB}^{-1}} \frac{w z d\,(\frac{1}{z})}{N\,(1-z)\,(w - \varepsilon\, \xi^j)} \quad .
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{z}$ ist lokale Karte auf $\mathbb{C}^*$. Das letzte Integral ist nun die Summe aller Residuen des in $\mathbb{C} - [\,0,1]$ meromorphen Integranden außerhalb des Weges l_{AB}^{-1} !

Nun sind die Funktionen w , $\frac{z}{1-z}$ in $\mathbb{C} - [0,1]$ holomorph, ebenso $\frac{1}{w - \varepsilon\, \xi^j}$ für $j \neq 0$, da dann w nirgends den Wert $\varepsilon\, \xi^j$ annimmt. Für $j \neq 0$ ist also $L\,(\frac{x}{y} - \varepsilon\, \xi^j,\ AB) = 0$.

Sei nun $j = 0$, dann gilt:

$$
(w - \varepsilon) \;=\; \varepsilon\left(\frac{w}{\varepsilon} - 1\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{w}{\varepsilon} - 1\right)\left((\frac{w}{\varepsilon})^{N-1} + \;\dots\; + \frac{w}{\varepsilon} + 1\right)
$$

$$= \left(\frac{w}{\varepsilon}\right)^N - 1 = -\left(w^N + 1\right) = -\left(\frac{z}{1-z} + 1\right) = \frac{-1}{1-z} \quad .$$

$$L\,(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j,\ AB)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l_{AB}^{-1}} \frac{-w\,((\frac{w}{\varepsilon})^{N-1} + \ \ldots\ + \frac{w}{\varepsilon} + 1)}{\varepsilon N} \ \frac{d\,(\frac{1}{z})}{(\frac{1}{z})}$$

$$= \frac{-w\,((\frac{w}{\varepsilon})^{N-1} + \ \ldots\ + \frac{w}{\varepsilon} + 1)}{N} \ \Big|_{z=\infty} \cdot \ \mathrm{Res}_{\,\infty}\,(\tfrac{1}{z})$$

$$= \frac{-\varepsilon\,(1 + \ \ldots\ + 1 + 1)}{\varepsilon N} = -1 \quad .$$

Mit (3.14) und (3.18) ergibt sich schließlich

$$L\,(x - \varepsilon\,\xi^j y,\ ABA^{-1}\,B^{-1} = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad j = 0 \\ \ \ 0 & \text{für} \quad 1 \leq j \leq N-2 \\ \ \ 1 & \text{für} \quad j = N-1 \end{cases}$$

Nach diesen Betrachtungen gilt dann offensichtlich auch

$L\,(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j,\ A^N) = 0$ sowie

$L\,(\frac{x}{y} - \varepsilon\,\xi^j,\ B^N) = -1$, d.h.

unter Beachtung von (3.14)

$$L\,(x - \varepsilon\,\xi^j y,\ A^N) \;=\; 0 \quad ,$$

$$L\,(x - \varepsilon\,\xi^j y,\ B^N) \;=\; 0 \quad .$$

Damit wurden alle für die Matrixreduktion benötigten Symbole berechnet.

3. Die Matrixreduktion

Jetzt wird der Beweis für Theorem 1 abgeschlossen. Der direkteste Weg um die Struktur der Gruppe $\mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{\infty}$ zu erhalten, ist natürlich alle Funktionen auf $F(N)$ zu finden, deren Divisoren Elemente von $\mathcal{F}^{\infty}$ sind; und das sind alle Funktionen, die Pole oder Nullstellen höchstens in den unendlich fernen Punkten besitzen. Die multiplikative Gruppe dieser Funktionen modulo $\mathbb{C}^*$ wurde mit $\mathcal{U}^{\infty}$ bezeichnet. $\mathcal{U}^{\infty}$ wird nun dadurch explizit bestimmt, indem man alle Elemente auflistet, die offensichtlich zu $\mathcal{U}^{\infty}$ gehören; dies geschah in (2.2), und die noch zu vollziehende Matrixreduktion liefert dann die restlichen Elemente eines Erzeugendensystems von $\mathrm{Mer}^{\infty}\,(F\,(N))/\,\mathbb{C}^*$. Durch die kanonische Isomorphie $\mathcal{U}^{\infty} \longrightarrow \mathcal{F}^{\infty}$ kann man auf die Gruppenstruktur von $\mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{\infty}$ schließen, genauer liegt folgende Situation vor:

Es war

$$\mathcal{F}^{**} \subset \mathcal{F}^{*} \subset \mathcal{F}^{\infty} \subset \mathcal{D}^{\infty} \quad ,$$

$$\mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{**} \cong (\mathbb{Z}\,/\,N\mathbb{Z})^{\,3N-1} \quad ,$$

$$\mathcal{F}^{*}/\,\mathcal{F}^{**} \cong (\mathbb{Z}\,/\,N\mathbb{Z})^{3} \quad ,$$

sowie

$$\mathcal{F}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{*} \hookrightarrow \mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{*} \longrightarrow \mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{\infty}$$

mit

$$\mathcal{D}^{\infty}/\,\mathcal{F}^{*} \cong (\mathbb{Z}\,/\,N\mathbb{Z})^{\,3N-4} \quad .$$

Die Matrixreduktion wird nun folgendes Ergebnis liefern.

Außer drei $m_i's$, $1 \leq i \leq t$, werden alle anderen Diagonaleinträge $m_1,\, m_2,\, \ldots,\, m_t$ 1 sein, d.h. für ungerades N ergeben sich diese drei $m_i's$ zu $N,\, N,\, N$ und für gerades N zu $N,\, N,\, N/2$.

Aufgrund von Satz (2.12) mit $r = t$, $n = N$ und $n_i = m_i$ ergibt sich dann die Struktur von $\mathcal{D}^\infty / \mathcal{F}^\infty$.

Wie aus Satz (3.7) bekannt ist, wird $\Phi\,(N)\;/\;[\;\Phi\,(N),\;\Phi\,(N)\;]$ von den Elementen A^N, B^N und $\rho ABA^{-1}\,B^{-1}\,\rho^{-1}$ erzeugt, wobei ρ aus einem Vertretersystem für die Rechtsnebenklassen von $\Phi\,(N)$ in Φ gewählt wurde. Wählt man als Repräsentanten

$$A^k\,(AB)^m \qquad \text{mit} \qquad 0 \le k := r\,, \quad m \le N-1\,,$$

so ergeben sich die Erzeugenden zu

$$\begin{array}{lcr}
(A^k\,(AB)^m)\;ABA^{-1}\;B^{-1}\,(A^k\,(AB)^{\,m}\,)^{-1} \quad , & & \\
A^N \quad , & (0 \le k\,, \quad m \le N-1) & (4.1) \\
B^N \quad . & &
\end{array}$$

Die Konjugierten von $ABA^{-1}\;B^{-1}$ werden jetzt so angeordnet, daß alle festen Potenzen von A in einem Block erscheinen, wohingegen die Potenzen von B innerhalb eines Blockes in aufsteigender Reihenfolge notiert werden, bzw. man ordnet die Konjugierten von $ABA^{-1}\;B^{-1}$ lexikographisch bzgl. des Paares (k, m) an.

Die Funktionen aus (2.2) werden wie folgt angeordnet:

$$\begin{array}{ll}
y - \xi^j \quad , & \\
x - \xi^j \quad , & j \;=\; 0, \,\ldots\, , N-1 \\
x - \varepsilon\xi^{j-1}\;y \quad , & \\
\quad x \quad , & (4.2) \\
\quad y \quad . &
\end{array}$$

Somit werden bei der zu reduzierenden Matrix die Spalten durch die Funktionen, bzw. die Zeilen durch die Erzeugenden wie folgt induziert.

	$y-1\ldots y-\xi^{N-1}$	$x-1\ldots x-\xi^{N-1}$	$x-\varepsilon\xi^{-1}y\ldots x-\varepsilon\xi^{N-2}y$
(A,B)			
$(AB)(A,B)(AB)^{-1}$			
$\vdots$			
$(AB)^{N-1}(A,B)(AB)^{-(N-1)}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A^k(A,B)A^{-k}$			
$(A^k(AB))(A,B)(A^k(AB))^{-1}$			
$\vdots$			
$(A^k(AB)^{N-1})(A,B)(A^k(AB)^{N-1})^{-1}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$A^{N-1}(A,B)A^{-(N-1)}$			
$(A^{N-1}(AB))(A,B)(A^{N-1}(AB))^{-1}$			
$\vdots$			
$(A^{N-1}(AB^{N-1})(A,B)(A^{N-1}(AB)^{N-1})^{-1}$			

(Ausnahmsweise wird hier $ABA^{-1}\,B^{-1}$ mit (A,B) bezeichnet.)

Aus Bequemlichkeitsgründen wurden die Zeilen für A^N und B^N erst einmal fortgelassen. Unter Berücksichtigung der elementaren Spaltenumformungen, einer ganzzahligen Linearkombination entspricht einem Potenzprodukt bei den Funktionen, werden diese Zeilen später hinzugefügt. Ebenso wurden die Spalten für die Funktionen x und y noch nicht berücksichtigt; da die Homomorphismen $L(x,\ )$ und $L(y,\ )$ auf $[\,\Phi,\Phi\,]$ verschwinden, bestehen diese Spalten aus den Nullvektoren, d.h. diese Spalten werden später mit den Zeilen für A^N und B^N berücksichtigt werden. Die jetzt zu reduzierende Matrix besteht also aus N "Blockzeilen" und 3 "Blockspalten".

Mit Hilfe von Teil 2 ergibt sich jetzt die erste Zeile der Matrix bezüglich $ABA^{-1}\,B^{-1}$ zu

$$\overbrace{1-1\,0\,\ldots\,0}^{y-\xi^j}\qquad\overbrace{-1\,1\,0\,\ldots\,0}^{x-\xi^j}\qquad\overbrace{1\,-1\,0\,\ldots\,0}^{x-\varepsilon\xi^{j-1}\,y}\ .$$

Die übrigen Zeilen werden wie folgt kompletiert. Für die erste, aus Blöcken bestehende, Spalte gilt

$$\begin{aligned} &L\,(y-\xi^j,\ (A^k\,(AB)^m)\,ABA^{-1}\,B^{-1}\,(A^k\,(AB)^m\,)^{-1}) \\ &=\ L\,(y-\xi^{j-m},\ ABA^{-1}\,B^{-1})\ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Weil diese Gleichung unabhängig von k ist, stimmen alle N Blöcke in der ersten Spalte überein. Weiterhin ist jede Zeile in einem solchen Block eine zyklische Permutation der ersten Zeile. Damit ergibt sich ein Block B_{1N} zu

$$B_{1N}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & -1 \\ -1 & 0 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Bemerkung (4.5):

Gleichung (4.4) sieht man folgendermaßen ein. Definiert man

$$\gamma\ := A^k\,(AB)^m\ ,\qquad \text{so ist}$$

$$\gamma^{-1} = (A^k\,(AB)^m\,)^{-1} \qquad \text{und wegen (3.12) gilt}$$

$$L\,(y-\xi^j\;,\;\gamma\;ABA^{-1}\;B^{-1}\;\gamma^{-1})$$

$$= L\,((y-\xi^j)\;\circ\;\gamma\;,\;ABA^{-1}\;B^{-1}) \quad .$$

Es war (s. (3.11))

$$(y-\xi^j)\;\circ\;\gamma \;=\; \xi^{L(1-\lambda,\gamma)}\,(y-\xi^{j-L\,(1-\lambda,\gamma)}) \quad ;$$

mit

$$L\,(1-\lambda,\gamma) \;=\; L\,(1-\lambda\;,\;A^k\,(AB)^m)$$

$$= L\,(1-\lambda\;,\;A^{k+m}\;B^m) \;=\; L\,(1-\lambda\;,\;A^{k+m})$$

$$+\,L\,(1-\lambda\;,\;B^m) \;=\; 0+m \;=\; m$$

folgt

$$(y-\xi^j)\;\circ\;\gamma \;=\; \xi^m\,(y-\xi^{j-m}) \quad ,$$

also

$$L\,(\xi^m\,(y-\xi^{j-m})\;,\;ABA^{-1}\;B^{-1})$$

$$= L\,(\xi^m\;,\;ABA^{-1}\;B^{-1})$$

$$+\,L\,(y-\xi^{j-m}\;,\;ABA^{-1}\;B^{-1})$$

$$= L\,(y-\xi^{j-m}\;,\;ABA^{-1}\;B^{-1}) \quad .$$

□

Sei weiterhin die Permutationsmatrix P gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ & \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ;$$

dann kann man den Block B_{1N} schreiben als $B_{1N} = I - P$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet.

Für die zweite aus Blöcken bestehende Spalte hat man

$$\begin{aligned} & L\,(x - \xi^j\,,\,(A^k\,(AB)^m\,)\,ABA^{-1}\,B^{-1}\,(A^k\,(AB)^m)^{-1}) \\ = \; & L\,(x - \xi^{j-k-m}\,,\,ABA^{-1}\,B^{-1}) \quad . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Diese Gleichung ergibt sich völlig analog zu (4.4) , d.h. wie in Bemerkung (4.5) .

Betrachtet man den ersten Block dieser Spalte mit $k = 0$, so ist wiederum jede Zeile eine zyklische Permutation der ersten Zeile, d.h. dieser Block sieht folgendermaßen aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & -1 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & -1 \end{pmatrix} = -(I - P) \quad .$$

Bezüglich eines beliebigen $k's$, ist aber die $(x - \xi^j)$-Spalte gerade die $(x - \xi^{j-k})$-Spalte des ersten Blocks. Man erhält also den betreffenden Block vom ersten Block indem man die Spalten zyklisch nach rechts k-mal permutiert, d.h. ein Block ist gleich $-(I - P)\, P^k$.

Schließlich gilt für die dritte Blockspalte

$$L\,(x - \varepsilon\xi^{j-1}y\ ,\ (A^k\,(AB)^m)\,ABA^{-1}\,B^{-1}\,(A^k\,(AB)^m)^{-1})$$

$$= L\,(x - \varepsilon\,\xi^{j-k-1}y\ ,\ ABA^{-1}\,B^{-1})\quad . \tag{4.7}$$

Wiederum verifiziert man (4.7) völlig analog zu (4.4) .

Weil die Gleichung (4.7) unabhängig von m ist, sind alle Zeilen in einem gegebenen Block identisch. Weiterhin erhält man alle weiteren Blöcke vom ersten Block indem man wie vorher alle Spalten zyklisch nach rechts permutiert. Bezeichnet man also mit Q die Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

so können die Blöcke der dritten Spalte offensichtlich als Q, QP, ..., QP^{N-1} geschrieben werden.

Damit lautet die vollständige Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I - P & -(I-P) & Q \\ \hline I - P & -(I-P)\,P & QP \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline I - P & -(I-P)\,P^{N-1} & QP^{N-1} \end{array}\right) \quad .$$

Diese Matrix wird nun reduziert; gleichzeitig werden dabei die Änderungen der Funktionen durch die elementaren Spaltenumformungen festgehalten. Subtraktion der ersten Blockzeile, bestehend aus den Blöcken $I - P$, $-(I - P)$ und Q, von allen anderen Zeilen ergibt die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I-P & (I-P) & Q \\ \hline 0 & -(I-P)\,(P-I) & Q\,(P-I) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & -(I-P)\,(P^{N-1}-I) & Q\,(P^{N-1}-I) \end{array}\right) .$$

Addiert man die erste Spalte $(I - P,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$ zur zweiten Spalte, so erhält man

$$\left(\begin{array}{c|c|c} I-P & 0 & Q \\ \hline 0 & -(I-P)\,(P-I) & Q\,(P-I) \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & -(I-P)\,(P^{N-1}-I) & Q\,(P^{N-1}-I) \end{array}\right) .$$

Durch diese elementaren Spaltenumformungen gehen also die Funktionen

$$x - 1\ ,\ x - \xi\ ,\ \ldots\ ,\ x - \xi^{N-1}$$

über in

$$(x-1)\,(y-1)\ ,\ (x-\xi)\,(y-\xi)\ ,\ \ldots\ ,\ (x-\xi^{N-1})\,(y-\xi^{N-1}) \quad .$$

Nun gilt

$$P^{k-1} - I \;=\; (P^{k-2} + \; \ldots + I)\,(P - I) \quad .$$

Multipliziert man die zweite Blockzeile $(0,\; -(I-P)\,(P-I),\; Q\,(P-I))$ von links mit $(P^{k-2} + \;\ldots + I)$ und subtrahiert sie jeweils von der k-ten (Block-) Zeile für $k = 3, \ldots, N$, so ergibt sich die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
I-P & 0 & Q \\ \hline
0 & (P-I)^2 & Q\,(P-I) \\ \hline
0 & 0 & Q\,(P^2 - I) - 2Q\,(P-I) \\ \hline
\vdots & \vdots & \vdots \\ \hline
0 & 0 & Q\,(P^{N-1} - I) - (N-1)\,Q\,(P-I)
\end{array}\right) \quad .$$

Die dritte Blockspalte ergibt sich dabei wie folgt. P ist Permutationsmatrix und in Q sind jeweils die Einträge der Spaltenvektoren identisch. Es gilt also $PQ = Q$; alle Einträge in Q werden somit durch P festgehalten, und schließlich hat man noch

$$(P^{k-2} \;+\; \ldots \;+\; I) \;=\; Q\,(k-1)\,Q \quad .$$

Die folgenden zwei Lemmata ermöglichen es, die Teilmatrizen $I - P$ und $(P-I)^2$ zu reduzieren. Aufgrund der Konfiguration der vollständigen Matrix ist aber dabei zu beachten, daß sich dadurch auch Q und $QP - Q$ ändern. Um die Umformungen übersichtlicher zu gestalten, werden die Lemmata erst in Teil 4 bewiesen.

Lemma (4.8):

Die $(N \times N)$-Matrix $I - P$ kann durch elementare Umformungen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} I_{N-1} & & 0 \\ & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

Dabei werden die Funktionen

$$y - 1 \,,\; y - \xi \,,\; \dots \,,\; y - \xi^{N-1}$$

durch elementare Spaltenumformungen in

$$y - 1 \,,\; y - \xi \,,\; \dots \,,\; y - \xi^{N-2} \,,\; \prod_{j=0}^{N-1} (y - \xi^j)$$

übergeführt.

Durch die elementaren Zeilenumformungen erhält man Q' aus Q mit

$$Q' = \begin{pmatrix} N-1 & -(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ N-2 & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ N & -N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \qquad .$$

Lemma (4.9):

Die $(N \times N)$-Matrix $(P-I)^2$ kann durch elementare Umformungen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} & & & 0 & 0 \\ I_{N-2} & & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & . \\ 0 & \dots & 0 & N & 0 \\ 0 & \dots & . & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

Hierbei gehen die Funktionen

$$(x-1)\,(y-1)\ ,\ (x-\xi)\,(y-\xi)\ ,\ \dots\ ,\ (x-\xi^{N-1})\,(y-\xi^{N-1})$$

durch Spaltenumformungen über in

$$\prod_{j=0}^{m}(x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \qquad (0 \leq m \leq N-3) \quad ,$$

$$\prod_{j=0}^{N-2}((x-\xi^j)\,(y-\xi^j))^{N-1-j} \quad ,$$

$$\prod_{j=0}^{N-1}(x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \qquad .$$

Durch die elementaren Zeilenumformungen erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix}
-(N-2) & 2\,(N-2) & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\
-(N-3) & 2\,(N-3) & -(N-3) & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
(N-3)\,N/2 & -(N-3)\,N & (N-3)\,N/2 & 0 & \dots & 0 \\
-N & 2N & -N & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}$$

aus $QP - Q$.

Mit (4.8) und (4.9) ergibt sich dann die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{array}{ccc} & & 0 \\ I_{N-1} & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{array} & \mathbf{O} & \begin{array}{cccccc} N-1 & & -(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ N-2 & & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & & \\ 1 & & -1 & 0 & \dots & 0 \\ N & & -N & 0 & \dots & 0 \end{array} \\
\hline
\mathbf{O} & \begin{array}{cccc} & & 0 & 0 \\ I_{N-2} & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & . \\ 0 \dots & 0 & N & 0 \\ 0 \dots & . & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{cccccc} -(N-2) & 2\,(N-2) & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ (N-3)\,\frac{N}{2} & -(N-3)\,N & (N-3)\,\frac{N}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -N & 2N & -N & 0 & \dots & 0 \end{array} \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{O} & QP^2 - 2QP + Q \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \begin{array}{c} (QP^{N-1} - (N-1)\cdot \\ QP \; + \; (N-2)\,Q) \end{array}
\end{array}\right)$$

Von nun an werden auch die Nullspalten bezüglich der Funktionen $\prod_{j=0}^{N-1}(y-\xi^j)$ und $\prod_{j=0}^{N-1}(x-\xi^j)\,(y-\xi^j)$ fortgelassen. Auch die Funktionen selbst werden nicht mehr berücksichtigt, denn man kann sie durch Funktionen erzeugen, die später noch addiert werden:

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{N-1}(y-\xi^j) &= -x^N \quad , \\ \prod_{j=0}^{N-1}(x-\xi^j)\,(y-\xi^j) &= x^N y^N \quad .\end{aligned} \tag{4.11}$$

Bemerkung (4.11):

(4.10) sieht man wie folgt ein. Da x und y Elemente ungleich Null des Funktionenkörpers Mer $(F\,(N))$ sind, gilt:

$$\begin{aligned}\prod_{j=0}^{N-1}(y-\xi^j) &= \prod_{j=0}^{N-1} y\left(1-\frac{\xi^j}{y}\right) \\ &= y^N\left(1^N-\frac{1}{y^N}\right) = y^N-1 = -x^N \quad ,\end{aligned}$$

wegen $x^N+y^N = 1$.

Völlig analog folgt

$$\prod_{j=0}^{N-1}(x-\xi^j) = -\,y^N \quad ,$$

also insgesamt

$$\prod_{j=0}^{N-1} (x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \;=\; x^N\, y^N \qquad .$$

$\square$

Ferner enthält der erste Block der ersten Spalte die Einheitsmatrix I_{N-1} ; die Einheitsmatrix I_{N-2} ist Bestandteil des zweiten Blockes der zweiten Spalte. Man kann also weiter vereinfachen zu

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
I_{N-1} & & \mathbf{O} \\
\cline{1-1}\cline{3-3}
 & \mathbf{O} & \\
0 \;\dots\; 0 & & N \qquad\qquad -N \quad 0 \qquad\qquad \dots\; 0 \\
\hline
 & \begin{matrix} & 0 \\ I_{N-2} & \vdots \\ & 0 \end{matrix} & \mathbf{O} \\
\cline{2-3}
\mathbf{O} & \begin{matrix} 0 \;\dots\; 0 & N \\ 0 \;\dots\; 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} (N-3)\,\frac{N}{2} & -(N-3)N & (N-3)\,\frac{N}{2} & 0 \;\dots\; 0 \\ -N & 2N & -N & 0 \;\dots\; 0 \end{matrix} \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{O} & QP^2 - 2QP + Q \\
\hline
\vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathrm{QP^{N-1} - (N-1)QP + (N-2)Q}
\end{array}\right)$$

Für die beteiligten Funktionen heißt das:

$$\begin{array}{ll} (1) & x - \xi^{-1} y \quad , \\ (2) & x - \varepsilon y \quad , \\ (3) & x - \varepsilon \xi y \quad , \qquad \longmapsto \\ & \vdots \\ (N) & x - \varepsilon \xi^{N-2} y \quad . \end{array}$$

$$(1) \quad (x - \varepsilon \xi^{-1} y) \left(\prod_{j=0}^{N-2} (y - \xi^j)^{-(N-1-j)} \right) \left(\prod_{j=0}^{N-3} \left(\prod_{i=0}^{j} (x - \xi^i)\,(y - \xi^i) \right)^{N-2-j} \right) ,$$

$$(2) \quad (x - \varepsilon y) \left(\prod_{j=0}^{N-2} (y - \xi^j)^{N-1-j} \right) \left(\prod_{j=0}^{N-3} \left(\prod_{i=0}^{j} (x - \xi^i)\,(y - \xi^i) \right)^{-2(N-2-j)} \right) ,$$

$$(3) \quad (x - \varepsilon \xi y) \left(\prod_{j=0}^{N-3} \left(\prod_{i=0}^{j} (x - \xi^i)\,(y - \xi^i) \right)^{N-2-j} \right) ,$$

$$\begin{array}{ll} (4) & x - \varepsilon \xi^2 y \quad , \\ & \vdots \\ (N) & x - \varepsilon \xi^{N-2} y \quad . \end{array}$$

Jetzt wird die dritte Blockspalte betrachtet. Alle Zeilen des Blockes $QP^{k-1} - (k-1)\,QP + (k-2)\,Q$, $k = 3, \ldots, N$, sind identisch und kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
&\overset{\overset{(*)}{\downarrow}}{} \\
&(0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \dots,\ 0)\ +\ (0,\ -(k-1),\ k-1,\ 0,\ \dots,\ 0) \\
&+\ (k-2,\ -(k-2),\ 0,\ \dots,\ 0) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (4.12) \\
=\ &(0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ -1,\ 0,\ \dots,\ 0) + (k-2,\ -2k+3,\ k-1,\ 0,\ \dots,\ 0)\,.
\end{aligned}
$$

Dabei steht die 1 (s. $(*)$) in der ersten Zeile an k-ter Position. Für $k=3$ oder $k=N$ ergeben sich die Vektoren zu

$$(1,-3,3,-1,0,\ \dots,0)\ \text{und}\ (N-3,-2N+3,\ N-1,\ 0,\ \dots,0,1)\,.$$

Die übrigen Vektoren, $4 \le k \le N-1$, liest man unmittelbar aus (4.12) ab. Man hat also (ein Block wird durch eine Zeile repräsentiert) :

$$
\left(\begin{array}{c|cc|cccccccc}
I_{N-1} & \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{O}} & \multicolumn{8}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline
\mathbf{O} & I_{N-2} & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & \multicolumn{8}{c}{\mathbf{O}} \\ \hline
 & 0\ \dots\ 0 & N & (N-3)N/2 & -(N-3)N & (N-3)N/2 & 0 & . & . & \dots & 0 \\
 & 0\ \dots\ . & 0 & -N & 2N & -N & 0 & . & . & \dots & 0 \\
 & 0\ \dots\ . & 0 & N & -N & 0 & 0 & . & . & \dots & 0 \\ \cline{2-11}
 & & & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cline{4-11}
\mathbf{O} & & & 2 & -5 & 3 & 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
 & & & & \vdots & & 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\
 & \multicolumn{2}{c|}{\mathbf{O}} & k-2 & -2k+3 & k-1 & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \ddots & & \\
 & & & N-3 & -2N+5 & N-2 & & & & 1 & -1 \\ \cline{4-11}
 & & & N-3 & -2N+3 & N-1 & 0 & \dots & & 0 & 1
\end{array}\right)
$$

Die Plazierung der Zeile $(0, \ldots, 0, -N, 0, \ldots, 0)$ ergibt sich nach offensichtlichen Zeilenvertauschungen. Eine weitere Reduzierung ermöglicht

Lemma (4.13):

Die $[\,(N+1) \times N]$-Matrix

$$\left(\begin{array}{cccccccc}
(N-3)N/2 & -(N-3)N & (N-3)N/2 & 0 & . & . & \ldots & 0 \\
-N & 2N & -N & 0 & . & . & \ldots & 0 \\
N & -N & 0 & 0 & . & . & \ldots & 0 \\
\hline
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\hline
2 & -5 & 3 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\
 & \vdots & & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 \\
k-2 & -2k+3 & k-1 & & & \ddots & & \\
 & \vdots & & & & & & \\
N-3 & -2N+5 & N-2 & & & & 1 & -1 \\
\hline
N-3 & -2N+3 & N-1 & 0 & \ldots & & 0 & 1
\end{array}\right)$$

kann durch elementare Umformungen auf die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cc|cc}
0 & 0 & & \\
E(N) & 0 & & \mathbf{O} \\
0 & N & & \\
\hline
 & & & 0 \\
 & & I_{N-3} & \\
 & \mathbf{O} & & \vdots \\
 & & 0 \ldots & 0
\end{array}\right)$$

gebracht werden.

Dabei gehen die Funktionen

$$(1)\quad (x-\varepsilon\xi^{-1}y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{-(N-1-j)}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)\,(y-\xi^i)\right)^{N-2-j}\right),$$

$$(2)\quad (x-\varepsilon y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{N-1-j}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)\,(y-\xi^i)\right)^{-2(N-2-j)}\right),$$

$$(3)\quad (x-\varepsilon\xi y)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)\,(y-\xi^i)\right)^{N-2-j}\right),$$

$$(4)\quad x-\varepsilon\xi^2 y$$

$$\vdots$$

$$(N)\quad x-\varepsilon\xi^{N-2}y$$

durch Spaltenumformungen über in

$$(1)\quad \prod_{j=0}^{N-2}\frac{(x-\xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}}\,(y-\xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2}}}{(x-\varepsilon\xi^{j-1}y)^{\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}},$$

$$(2)\quad \prod_{j=0}^{N-2}\left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{N-1-j},$$

(3) $(x - \varepsilon\xi^{j-1}y)\,(x - \varepsilon y)\,(x - \varepsilon\xi y)$,

(4) $x - \varepsilon\xi^2 y$

$\vdots$

$(N-1)$ $x - \varepsilon\xi^{N-3}y$,

(N) $\prod_{j=0}^{N-1} (x - \varepsilon\xi^{j-1}y)$.

Bei den Zeilenoperationen wird weder die erste Zeile mit einer anderen Zeile vertauscht, noch ein Vielfaches der ersten Zeile zu einer anderen Zeile addiert.

Lemma (4.13) kompletiert die Matrixreduktion. Wie bereits anfangs erwähnt, werden jetzt noch Zeilen für A^N und B^N sowie Spalten für x und y addiert. Es ergibt sich somit die Matrix

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & \quad & x & y \end{array} \\
\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \\ \\ A^N \\ B^N \end{array} &
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c}
I_{N-1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \hline
\mathbf{O} & \begin{array}{cccc} & & & 0 \\ & I_{N-2} & & \vdots \\ & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & N \end{array} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \hline
\mathbf{O} & \mathbf{O} & \begin{array}{ccc} E(N) & 0 & \\ 0 & N & \mathbf{O} \\ & \mathbf{O} & I_{N-3} \end{array} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \hline
* & * & * & 1 & 0 \\ \hline
* & * & * & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array} .
$$

Aus dieser Matrix wurde weiterhin eine Nullspalte bezüglich der Funktion

$$\prod_{j=0}^{N-1} (x - \varepsilon\xi^{j-1}y) = 1 \tag{4.14}$$

und eine Nullzeile (unterhalb I_{N-3}) entfernt.

Die logarithmischen Symbole $L(x, A^N) = L(y, B^N) = 1$ und $L(x, B^N) = L(y, A^N) = 0$ wurden schon berechnet. Nur die Perioden in den untersten zwei Zeilen sind noch nicht bestimmt worden; man braucht sie aber auch in den meisten Fällen nicht explizit anzugeben, da sie durch offensichtliche Zeilenoperationen in die Nullzeile umgeformt werden können. Allerdings müssen die Einträge in den Spalten mit $N, E(N)$ und N berechnet werden. Die Funktionen bezüglich dieser Einträge sind:

$$\prod_{j=0}^{N-2} ((x - \xi^j)(y - \xi^j))^{N-1-j} \quad ,$$

$$\prod_{j=0}^{N-2} \frac{(x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)(N-1-j)}{2}} (y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)(N-1-j)}{2}}}{(x - \varepsilon\xi^{j-1}y)^{\frac{(N-4+j)(N-1-j)}{2}}} , \tag{4.15}$$

$$\prod_{j=0}^{N-2} \left(\frac{x - \varepsilon\xi^{j-1}y}{y - \xi^j}\right)^{N-1-j} \quad .$$

Mit Hilfe von Teil 2 ergibt sich dann folgende Tabelle.

f	$L(f, A^N)$	$L(f, B^N)$	
$\prod_{j=0}^{N-2} ((x-\xi^j)(y-\xi^j))^{N-1-j}$	$N(N-1)$	$N(N-1)$	
$\prod_{j=0}^{N-2} \frac{(x-\xi^j)^{\frac{(N-2-j)(N-1-j)}{2}} (y-\xi^j)^{\frac{(N-4-j)(N-1-j)}{2}}}{(x-\varepsilon\xi^{j-1}y)^{\frac{(N-4+j)(N-1-j)}{2}}}$	$\frac{N(N-4)(N-1)}{2}$	$\frac{N(N-2)(N-1)}{2}$	(4.16)
$\prod_{j=0}^{N-2} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{N-1-j}$	$-N(N-1)$	0	

Da alle sechs logarithmischen Symbole durch N teilbar sind, können auch sie durch elementare Zeilenoperationen in die Nullspalte umgeformt werden. Nach den anfangs gemachten Bemerkungen, ergibt sich also die Struktur von Theorem 1 wie behauptet.

Zusammenfassend hat man weiterhin

Theorem 2

$\mathcal{U}^\infty$ wird erzeugt von

$$T := \Bigg\{ x,\ y,\ x-\xi^j,\ y-\xi^j,\ x-\varepsilon\xi^j y \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x-\xi^j)(y-\xi^j))^j\right)^{\frac{1}{N}} \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(x-\varepsilon^j y)\right)^j\right)^{\frac{1}{N}} \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\,(x-\varepsilon\xi^j y)\right)^{j(j+1)/2}\right)^{\frac{1}{E(N)}} \quad ,$$

$$\left.(0 \;\leq\; j \;\leq\; N-1)\right\} \quad .$$

Beweis:

Es war

$$x^N + y^N \;=\; \prod_{j=0}^{N-1} (x - \varepsilon\xi^j y) \;=\; 1 \;=\; \prod_{j=0}^{N-1} (x - \varepsilon\xi^{j-1} y)$$

$$\prod_{j=0}^{N-1} (y-\xi^j) \;=\; -x^N \qquad \text{sowie} \tag{4.17}$$

$$\prod_{j=0}^{N-1} (x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \;=\; x^N y^N \quad ,$$

und aus der Matrixreduktion ist bekannt, daß $\mathcal{U}^\infty$ von

$$
\begin{aligned}
S := \Bigg\{ & x,\ y,\ x - \xi^j,\ y - \xi^j,\ x - \varepsilon \xi^j y \quad , \\
& \left(\prod_{j=0}^{N-2} ((x - \xi^j)\,(y - \xi^j))^{N-1-j} \right)^{\frac{1}{N}} \quad , \\
& \left(\prod_{j=0}^{N-2} \frac{(x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}}\,(y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2}}}{(x - \varepsilon \xi^{j-1} y)^{\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}} \right)^{\frac{1}{E(N)}} \quad , \qquad (4.18) \\
& \left(\prod_{j=0}^{N-2} \left(\frac{x - \varepsilon \xi^{j-1} y}{y - \xi^j} \right)^{N-1-j} \right)^{\frac{1}{N}} \quad , \quad (0 \le j \le N-1) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

erzeugt wird.

Nun gilt (man kann den oberen Index als $N-1$ wählen):

$$
\begin{aligned}
S_1 \ &:= \left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x - \xi^j)\,(y - \xi^j))^{N-1-j} \right)^{\frac{1}{N}} \\
&= \left(\prod_{j=0}^{N-1} (x - \xi^j)\,(y - \xi^j) \right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x - \xi^j)\,(y - \xi^j))^{-j} \right)^{\frac{1}{N}}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(4.17)}{=} \quad \left(x^N y^N\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\right)^{-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \quad (xy)^{N-1} \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\right)^{-j}\right)^{\frac{1}{N}} \quad .$$

Also kann man die Einheit

$$\left(\prod_{j=0}^{N-2} \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\right)^{N-1-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

durch

$$T_1 \;:=\; \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\right)^{j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

ersetzen.

Entsprechend hat man

$$S_2 \;:=\; \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{N-1-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{\frac{N-1}{N}} \quad \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$\overset{(4.17)}{=} \quad \left(\frac{1}{-x^N}\right)^{\frac{N-1}{N}} \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \quad \left(\frac{-1}{x}\right)^{N-1} \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{-1}\right)^{\frac{1}{N}} \quad .$$

Somit läßt sich die Einheit

$$\left(\prod_{j=0}^{N-2} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{N-1-j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

durch

$$\tilde{T}_2 \ := \ \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j-1}y}{y-\xi^j}\right)^{j}\right)^{\frac{1}{N}}$$

ersetzen.

Multipliziert man $\tilde{T}_2$ mit T_1 unter Beachtung von (4.17), so kann man die Einheit $\tilde{T}_2$ durch

$$T_2 \ := \ \left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(x-\varepsilon^j y)\right)^j\right)^{\frac{1}{N}}$$

ersetzen.

Schließlich gilt mit

$$
\begin{aligned}
\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2} &= \frac{N\,(N-(3+2j))}{2} \quad +1+ \quad \frac{(3+j)\,j}{2} \\
\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2} &= \frac{N\,(N-(5+2j))}{2} \quad +2+ \quad \frac{(5+j)\,j}{2} \\
\frac{-(N-4+j)\,(N-1-j))}{2} &= \frac{-N\,(N-5)}{2} \quad -2+ \quad \frac{(-3+j)\,j}{2}
\end{aligned}
$$

(4.19)

$$
\left(\prod_{j=0}^{N-1} \frac{\left(x-\xi^j\right)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}} \left(y-\xi^j\right)^{(N-4-j)\,(N-1-j)}}{\left(x-\varepsilon\xi^{j-1}y\right)^{\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}} \right)^{\frac{1}{E(N)}}
$$

$$
\overset{(4.17)}{=} \prod_{j=0}^{N-1} \frac{\left(x-\xi^j\right)^{\frac{(N\,(N-(3+2j))}{2\,E(N)}} \left(y-\xi^j\right)^{\frac{N\,(N-(5+2j))}{2\,E(N)}}}{\left(x-\varepsilon\xi^{j-1}y\right)^{\frac{N\,(N-5)}{2\,E(N)}}}
$$

$$
\cdot \left(-y^N\right)^{\frac{1}{E(N)}} \quad \left(-x^N\right)^{\frac{2}{E(N)}} \quad .
$$

$$
\left(\prod_{j=0}^{N-1} \left(x-\xi^j\right)^{\frac{(3+j)j}{2}} \left(y-\xi^j\right)^{\frac{(5+j)j}{2}} \left(x-\varepsilon\xi^{j-1}y\right)^{\frac{(-3+j)j}{2}} \right)^{\frac{1}{E(N)}} \quad ,
$$

d.h. man kann diese Einheit durch

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1}\left(x-\xi^{j}\right)^{\frac{(3+j)j}{2}}\left(y-\xi^{j}\right)^{\frac{(5+j)j}{2}}\left(x-\varepsilon\xi^{j-1}y\right)^{\frac{(-3+j)j}{2}}\right)^{\frac{1}{E(N)}} =: \tilde{T}_3$$

ersetzen.

Multipliziert man dann, unter Beachtung von (4.17), die Einheit $\tilde{T}_3$ mit

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1}\left(x-\xi^{j}\right)^{j}\right)^{\frac{-1}{E(N)}}\quad\left(\prod_{j=0}^{N-1}\left(\frac{x-\varepsilon\xi^{j}y}{y-\xi^{j}}\right)^{j}\right)^{\frac{2}{E(N)}}\quad ,$$

so ergibt sich

$$T_3 := \left(\prod_{j=0}^{N-1}\left(\left(x-\xi^{j}\right)\left(y-\xi^{j}\right)\left(x-\varepsilon\xi^{j}y\right)\right)^{\frac{j(j+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{E(N)}} .$$

□

Nun wird sukzessive das abschließende Theorem 3 vorbereitet.

Korollar (4.20):

$\mathcal{U}^\infty$ wird erzeugt von

$$\tilde{\mathcal{V}} := \Bigg\{ x,\ y,\ x-1 \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x-\xi^j)\,(y-\xi^j))^j \right)^{\frac{1}{N}} \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x-\xi^j)\,(x-\varepsilon\xi^j y))^j \right)^{\frac{1}{N}} \quad ,$$

$$\left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\,(x-\varepsilon\xi^j y))^{\frac{j(j+1)}{2}} \right)^{\frac{1}{E(N)}} \Bigg\} \quad ,$$

zusammen mit den Funktionen aus (2.7).

Dieses Erzeugendensystem wird mit $\mathcal{V}$ bezeichnet.

Beweis:

Es muß noch nachgewiesen werden, daß sich die $3N-1$ Funktionen $x-\xi^j$, $y-\xi^j$ und $x-\varepsilon\xi^j y$ durch Funktionen aus $\mathcal{V}$ darstellen lassen; es gilt aber :

$$\left(\frac{x-1}{x-\xi^j}\right)^{-1} (x-1) = x-\xi^j \quad ,$$

$$\left(\frac{y-1}{y-\xi^j}\right)^{-1} \left(\frac{y-1}{x-\varepsilon y}\right) \left(\frac{x-1}{x-\varepsilon y}\right)^{-1} (x-1) \;=\; y-\xi^j$$

und schließlich

$$\left(\frac{x-\varepsilon y}{x-\varepsilon\xi^j y}\right)^{-1} \left(\frac{x-1}{x-\varepsilon y}\right)^{-1} (x-1) \;=\; x-\varepsilon\xi^j y \quad .$$

□

Jetzt werden die Divisoren der drei Produktfunktionen aus Theorem 2 berechnet. Mit Hilfe der Divisoren aus Teil 1 ergibt sich

Feststellung (4.21):

i) $\left(\prod_{j=0}^{N-1} ((x-\xi^j)\,(y-\xi^j))^{\frac{j}{N}}\right)$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} (j\,(Nb_j - (c_0 + \ldots + c_{N-1}) + Na_j - (c_0 + \ldots + c_{N-1})))$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} Nj\,(a_j+b_j) - \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} j\right) \; 2\,(c_0 + \ldots + c_{N-1})$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} j\,(a_j+b_j) - \frac{1}{N} \; \frac{(N-1)\,N}{2} \; 2\,(c_0 + \ldots + c_{N-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} j\,(a_j+b_j) - (N-1)\,(c_0 + \ldots + c_{N-1})$$

ii) $$\left(\prod_{j=0}^{N-1} \left((x-\xi^j)\,(x-\varepsilon\xi^j y)\right)^{\frac{j}{N}}\right)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \left(j\,(Nb_j-(c_0+\ \ldots\ +c_{N-1})+Nc_j-(c_0+\ \ldots\ +c_{N-1}))\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} j\,(b_j+c_j) \ - \frac{2}{N} \ \left(\sum_{j=0}^{N-1} j\right) \ (c_0+\ \ldots\ +c_{N-1})$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} j\,(b_j+c_j) \ - \ (N-1) \ \ (c_0+\ \ldots\ +c_{N-1})$$

iii) $$\left(\prod_{j=0}^{N-1} \ \left((x-\xi^j)\,(y-\xi^j)\,(x-\varepsilon\xi^j y)\right)^{\frac{j\,(j+1)}{2\,E(N)}}\right)$$

$$= \frac{1}{E(N)} \ \sum_{j=0}^{N-1} \ \left(\frac{j\,(j+1)}{2}\,(Nb_j-(c_0+\ \ldots\ +c_{N-1})\right.$$

$$+ \ Na_j \ - \ (c_0+\ \ldots\ +c_{N-1})$$

$$\left.+ \ Nc_j \ - \ (c_0+\ \ldots\ +c_{N-1}))\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \ \frac{j\,(j+1)}{2} \ \frac{N}{E(N)} \ (a_j+b_j+c_j)$$

$$- \frac{3}{E(N)} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j\,(j+1)}{2} \quad (c_0 + \; \ldots \; + c_{N-1}) \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j\,(j+1)}{2} \; \frac{N}{E(N)} \; (a_j + b_j + c_j)$$

$$- \frac{(N-1)\; N\; (N+1)}{2\; E(N)} \quad (c_0 + \; \ldots \; + c_{N-1})$$

Nachbemerkung zu Theorem 2 (4.22):

Mit

$$S_1 \;=\; \prod_{j=0}^{N-2} \left(((x - \xi^j)\,(y - \xi^j))^{N-1-j} \right)^{\frac{1}{N}}$$

und

$$T_1 \;=\; \prod_{j=0}^{N-1} \left(((x - \xi^j)\,(y - \xi^j))^j \right)^{\frac{1}{N}}$$

ergibt sich

$$(S_1) \;=\; \sum_{j=0}^{N-2} (N - 1 - j)\,(a_j + b_j) - (N-1)\,(c_0 + \; \ldots \; + c_{N-1})$$

sowie

$$(T_1) \;=\; \sum_{j=1}^{N-1} j\,(a_j + b_j) - (N-1)\,(c_0 + \; \ldots \; + c_{N-1}) \quad .$$

Es folgt :

$$(S_1 \cdot T_1) = (S_1) + (T_1)$$

$$= (N-1)\,[(a_0 + \ldots + a_{N-1}) + (b_0 + \ldots + b_{N-1})]$$

$$-2\,(N-1)\,(c_0 + \ldots + c_{N-1})$$

$$= (N-1)\,(xy) = \left((xy)^{N-1}\right) \quad .$$

Dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{C}^*$ mit

$$T_1^{-1} = c\,\frac{S_1}{(xy)^{N-1}} \quad ; \qquad \text{also ist} \qquad T_1 \in \mathcal{U}^\infty \quad .$$

Die anderen Funktionen lassen sich ähnlich behandeln, d.h. Theorem 2 ist natürlich auch mittels Divisoren verifizierbar.

□

Rückblickend kann man folgendes festhalten. In Theorem 1 wurde eine Endlichkeitsaussage formuliert und schließlich mit Hilfe der Matrixreduktion bewiesen; durch Vereinfachen der S -Einheiten ergab sich das Erzeugendensystem von $\mathcal{U}^\infty$ aus Theorem 2. Die Matrixreduktion ist zwar in gewisser Weise das Fundament dieser zwei Theoreme, lieferte bis jetzt aber keine weiteren Aussagen über die "innere" Struktur der Gruppe $\mathcal{U}^\infty$, bzw. aufgrund der Isomorphie $\mathcal{U}^\infty \longrightarrow \mathcal{F}^\infty$ über $\mathcal{F}^\infty$.

Theorem 3 wird jetzt durch die folgenden Betrachtungen motiviert.

Ist $D = \sum_{P \in F(N)} m_p P$ ein Divisor auf $F(N)$, also die Abbildung

$$D : F(N) \longrightarrow \mathbb{Z} \quad , \qquad D(P) = m_p \quad ,$$

so versteht man unter $D \bmod N$ die Abbildung

$$D \bmod N : F(N) \longrightarrow \mathbb{Z} / N \mathbb{Z} \quad ,$$

$D \bmod N(P) = m_p + N\,\mathbb{Z} =: \bar{m}_p$; d.h. in der üblichen Schreibweise $D \bmod N = \sum_{P \in F(N)} \bar{m}_p P$.

Speziell gilt dann

$$\mathcal{D}^\infty \bmod N := \left\{ D \bmod N \ / \ D \in \mathcal{D}^\infty \right\}$$

und

$$\mathcal{F}^\infty \bmod N := \left\{ D \bmod N \ / \ D \in \mathcal{F}^\infty \right\} .$$

Theorem 3

Ein Element D von $\mathcal{D}^\infty$ liegt genau dann in $\mathcal{F}^\infty$, mod N, wenn $D \in \langle \mathcal{W} \rangle$ mit

$$\mathcal{W} := \begin{cases} a_0 + \ldots + a_{N-1} & , \\ b_0 + \ldots + b_{N-1} & , \\ c_0 + \ldots + c_{N-1} & , \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{j=0}^{N-1} j\,(a_j+b_j) \quad , \\[2ex] \sum_{j=0}^{N-1} j\,(b_j+c_j) \quad , \\[2ex] \sum_{j=0}^{N-1} j\,(j+1)\,(a_j+b_j+c_j) \end{array}\right\} \qquad \text{gilt.}$$

Bemerkung:

Alle Betrachtungen sind also mod N gemeint.

Beweis:

In Korollar (4.20) wurde $\mathcal{U}^\infty = < \mathcal{V} >$ verifiziert. Es galt $\mathcal{F}^{**} = N\,\mathcal{D}^\infty$, d.h., mod N, wird $\mathcal{F}^\infty$ durch die Divisoren der Funktionen aus $\tilde{\mathcal{V}}$ erzeugt; die Divisoren der Funktionen aus (2.7) leisten also keinen Beitrag.

Aus Teil 1 und Feststellung (4.21) ergeben sich die Divisoren von $\tilde{\mathcal{V}}$ zu :

$$\mathcal{P} := \left\{ \begin{array}{l} (a_0 + \ldots + a_{N-1}) - (c_0 + \ldots + c_{N-1}) \quad , \\[1ex] (b_0 + \ldots + b_{N-1}) - (c_0 + \ldots + c_{N-1}) \quad , \\[1ex] N\,b_0 - (c_0 + \ldots + c_{N-1}) \quad , \\[1ex] \sum_{j=0}^{N-1} j(a_j+b_j) - (N-1)\,(c_0 + \ldots + c_{N-1}) \quad , \\[1ex] \sum_{j=0}^{N-1} j(b_j+c_j) - (N-1)\,(c_0 + \ldots + c_{N-1}) \quad , \end{array}\right. \tag{4.23}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j(j+1)}{2} \frac{N}{E(N)} (a_j+b_j+c_j) - \frac{(N-1)\, N(N+1)}{2\, E(N)} (c_0+ \ldots +c_{N-1}) \Bigg\} .$$

Nun ist aber offensichtlich $< \mathcal{P} > = < \mathcal{R} >$ mit

$$\mathcal{R} := \Bigg\{ a_0 + \ \ldots \ + a_{N-1} \quad ,$$

$$b_0 + \ \ldots \ + b_{N-1} \quad ,$$

$$c_0 + \ \ldots \ + c_{N-1} \quad ,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j\ (a_j + b_j) \quad , \tag{4.24}$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} j\ (b_j + c_j) \quad ,$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j(j+1)}{2} \quad \frac{N}{E(N)} (a_j + b_j + c_j) \Bigg\} \quad ,$$

denn für gerades N hat man $\frac{N}{2\,E(N)} = 1$, während $\frac{N}{E(N)} = 1$ für ungerades N gilt, und schließlich ist $\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j\,(j+1)}{2} (a_j + b_j + c_j)$ ein Vielfaches von $\sum_{j=0}^{N-1} j\ (j+1)\ (a_j + b_j + c_j)$ mod N .

□

4. Beweise der Lemmata

Beweis von Lemma (4.8):

Es war

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also ist

$$I - P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \dots & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & -1 \\ -1 & & & 0 & & 1 \end{pmatrix} .$$

Nun wird die zweitletzte Zeile zur drittletzten addiert, die drittletzte zur viertletzten Zeile usw.; schließlich wird die 1. Zeile zur letzten Zeile addiert. Nach diesen Operationen erhält man die Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & & -1 \\ I_{N-1} & & & \vdots \\ & & & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Addiert man jetzt sukzessive die $(N-1)$-ten Spalten zur letzten Spalte, so ergibt sich offensichtlich die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{N-1} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \quad \dots & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Wie schon erwähnt, entspricht einer ganzzahligen Linearkombination einem Potenzprodukt bei den Funktionen.

Die Funktionen

$$y^{-1} \; , \; y - \xi \; , \; \dots \; , \; y - \xi^{N-1}$$

werden somit durch Spaltenumformungen in

$$y - 1 \; , \; y - \xi \; , \; \dots \; , \; y - \xi^{N-2} \; , \; \prod_{j=0}^{N-1} (y - \xi^j)$$

übergeführt.

Die Matrix Q war gegeben durch

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Die Anwendung der Zeilenoperationen auf Q liefert dann offensichtlich

$$Q' = \begin{pmatrix} N-1 & -(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ N-2 & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ N & -N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

□

Beweis von Lemma (4.9):

Mit $(I-P)^2 = (I-P)\,(I-P)$ und aufgrund von Lemma 4.8 gewinnt man die Darstellung

$$(I-P)^2 = \begin{pmatrix} I_{N-1} & & & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A \cdot B.$$

Nun werden sukzessive folgende Spaltenumformungen auf die Matrix B angewendet.

Man addiert die erste zur zweiten Spalte, danach die zweite zur dritten Spalte usw.; abschließend wird somit die vorletzte Spalte zur letzten addiert.

Offensichtlich ergibt sich dann die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{N-1} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ,$$

insgesamt damit

$$\begin{pmatrix} I_{N-1} & & & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{N-1} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & & & & 0 \\ 1 & 1 & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 2 & 1 & \\ 1 & & & & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & & & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Jetzt wird die $[(N-1) \times (N-1)]$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

betrachtet.

Subtrahiert man die letzte Zeile von allen anderen Zeilen, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & & & \vdots \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdot & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Nun werden alle Zeilen, außer der letzten, von der letzten Zeile subtrahiert. Die so entstandene Matrix hat dann die Form

$$\begin{pmatrix} I_{N-2} & & & \begin{matrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \end{matrix} \\ 0 & \dots & 0 & N \end{pmatrix} \quad .$$

Addiert man noch alle Spalten außer der letzten, zur letzten Spalte, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} I_{N-2} & & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 & \dots & 0 & N \end{pmatrix} \quad .$$

Durch die bisher vollzogenen Spaltenumformungen gehen die Funktionen

$$(x-1)\,(y-1)\ ,\ (x-\xi)\,(y-\xi)\ ,\ \dots\ ,\ (x-\xi^{N-1})\,(y-\xi^{N-1})$$

über in

$$\prod_{j=0}^{m} (x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \qquad (0 \le m \le N-3) \quad ,$$

$$\prod_{j=0}^{N-2} ((x-\xi^j)\,(y-\xi^j))^{N-1-j} \quad ,$$

$$\prod_{j=0}^{N-1} (x-\xi^j)\,(y-\xi^j) \quad .$$

Nun ist

$$Q \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & \vdots \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} ,$$

also

$$QP - Q = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \vdots & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Aufgrund der Zeilenoperationen ergibt sich

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -(N-1) & 2(N-1) & -(N-1) & 0 & \dots & 0 \\ -(N-2) & 2(N-2) & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -N & 2N & -N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} -(N-2) & 2(N-2) & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ -(N-3) & 2(N-3) & -(N-3) & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -N & 2N & -N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} -(N-2) & 2(N-2) & -(N-2) & 0 & \dots & 0 \\ -(N-3) & 2(N-3) & -(N-3) & 0 & \dots & 0 \\ & \vdots & & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{(N-3)N}{2} & -(N-3)N & \frac{(N-3)N}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -N & N & -N & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} .$$

Dazu ist noch Folgendes zu bemerken.

Die erste umgeformte Matrix entstand nach den Operationen aus Lemma (4.8) .

Weiterhin ist zu beachten, daß bei der Behandlung von $(I-P)^2$ eine Nullzeile bzw. Nullspalte fortgelassen wurde. Die zweitletzte Zeile der letzten Matrix ergibt sich dann wegen

$$1+2+\ \dots\ +(N-2)\ -1\ =\ \frac{(N-3)N}{2} \quad .$$

□

Beweis von Lemma (4.13):

Gegeben ist die Matrix

$$
\left(\begin{array}{cccccccc}
\frac{(N-3)N}{2} & -(N-3)N & \frac{(N-3)N}{2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
-N & 2N & -N & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
N & -N & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\hline
1 & -3 & 3 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
2 & -5 & 3 & 1 & -1 & 0 & & \\
 & \vdots & & 0 & 1 & -1 & & \\
k-2 & -2k+3 & k-1 & & & & & \\
 & \vdots & & & & \ddots & & \\
N-3 & -2N+5 & N-2 & & & & 1 & -1 \\
\hline
N-3 & -2N+3 & N-1 & 0 & \cdots & & 0 & 1
\end{array}\right).
$$

Man addiert die erste und zweite Spalte zur dritten Spalte; dann wird das zweifache der ersten Spalte zur zweiten Spalte addiert. Die Operationen ergeben die Matrix

$$
\left(\begin{array}{cc|cccccc}
\frac{(N-3)N}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
-N & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
N & N & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & 0 \\
\hline
1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
 & \vdots & & & & \ddots & & \\
N-3 & -1 & 0 & & & 1 & & -1 \\
N-3 & -3 & -1 & & & 0 & & 1
\end{array}\right).
$$

Die Wirkung dieser elementaren Spaltenumformungen auf die drei Funktionen ist wie folgt:

$$(1)\quad (x-\varepsilon\xi^{-1}y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{-(N-1-j)}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)(y-\xi^i)\right)^{N-2-j}\right),$$

$$(2)\quad (x-\varepsilon y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{N-1-j}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)(y-\xi^i)\right)^{-2(N-2-j)}\right),$$

$$(3)\quad (x-\varepsilon\xi y)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)(y-\xi^i)\right)^{N-2-j}\right).$$

$$\longmapsto$$

$$(1)\quad (x-\varepsilon\xi^{-1}y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{-(N-1-j)}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-3}\left(\prod_{i=0}^{j}(x-\xi^i)(y-\xi^i)\right)^{N-2-j}\right),$$

$$(2)\quad (x-\varepsilon\xi^{-1}y)^2\,(x-\varepsilon y)\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{-(N-1-j)},$$

$$(3)\quad (x-\varepsilon\xi^{-1}y)\,(x-\varepsilon y)\,(x-\varepsilon\xi y).$$

Dabei kann man die erste dieser drei neuen Funktionen noch umformen zu

$$
\begin{aligned}
&(x-\varepsilon\xi^{-1}y)\left(\prod_{j=0}^{N-2}(y-\xi^j)^{-(N-1-j)}\right)\left(\prod_{j=0}^{N-2}((x-\xi^j)\,(y-\xi^j))^{(N-2-j)\,(N-1-j)/2}\right)\\
&= (x-\varepsilon\xi^{-1}y)\prod_{j=0}^{N-2}(x-\xi^j)^{(N-2-j)\,(N-1-j)/2}\,(y-\xi^j)^{(N-4-j)\,(N-1-j)/2} \quad .
\end{aligned}
$$

Jetzt werden Zeilenumformungen benutzt. Man addiert die zweitletzte Zeile zur drittletzten Zeile, die drittletzte zur viertletzten Zeile usw., allerdings ausschließlich der ersten drei Zeilen, d.h. diese Zeilen bleiben unverändert. Addiert man abschließend noch die vierte Zeile zur letzten Zeile, so erhält man die Matrix

$$
\left(\begin{array}{cccccccc}
\frac{(N-3)N}{2} & 0 & 0 & & & \cdots & & 0\\
-N & 0 & 0 & & & \cdots & & 0\\
N & N & 0 & & & \cdots & & 0\\
\hline
\frac{(N-2)\,(N-3)}{2} & -(N-3) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1\\
\frac{(N-1)\,(N-4)}{2} & -(N-4) & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\
\vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\
N-3 & -1 & 0 & & & & 1 & -1\\
\frac{N(N-3)}{2} & -N & 0 & & & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right) \quad .
$$

Da ferner in dieser Matrix die Spaltenvektoren

$$(0,0,0,1,0,\ \ldots\ ,0)^T\ ,\quad (0,0,0,0,1,0,\ \ldots\ ,0)^T\ ,\ \ldots\ ,\quad (0,0,\ \ldots\ ,1,0)^T$$

enthalten sind, kann man weiter umformen zu

$$
\left(\begin{array}{ccccccc}
\frac{(N-3)N}{2} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\
-N & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\
N & N & 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
 & & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & & 1 & 0 \\
\frac{N(N-3)}{2} & -N & 0 & \dots & & 0 & 0
\end{array}\right) .
$$

Hierdurch werden die ersten, zweiten und N-ten Funktionen verändert, genauer gilt:

$$
(1) \quad (x - \varepsilon\xi^{-1}y) \prod_{j=0}^{N-2} (x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}} \, (y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2}} \quad ,
$$

$$
(2) \quad (x - \varepsilon\xi^{-1}y)^2 \, (x - \varepsilon y) \prod_{j=0}^{N-2} (y - \xi^j)^{-(N-1-j)} \quad ,
$$

$$
(\mathrm{N}) \quad x - \varepsilon\xi^{N-2}y \quad .
$$

$$
\longmapsto
$$

$$
(1) \quad \prod_{j=0}^{N-2} \frac{(x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}} \, (y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2}}}{(x - \varepsilon\xi^{j-1}y)^{\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}} \quad ,
$$

$$(2) \qquad \prod_{j=0}^{N-2} \left(\frac{x - \varepsilon \xi^{j-1} y}{y - \xi^j} \right)^{N-1-j} \quad ,$$

$$(\mathrm{N}) \qquad \prod_{j=0}^{N-1} (x - \varepsilon \xi^{j-1} y) \quad .$$

Dabei ist zu (1)

$$(x - \varepsilon \xi^{-1} y) \prod_{j=0}^{N-2} (x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}} \, (y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-1-j)}{2}}$$

$$\cdot \left((x - \varepsilon \xi^{-1} y)\,(x - \varepsilon y)\,(x - \varepsilon \xi y) \right)^{-\frac{(N-2)\,(N-3)}{2}}$$

$$\cdot \prod_{j=3}^{N-2} (x - \varepsilon \xi^{j-1} y)^{-\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-2} \frac{(x - \xi^j)^{\frac{(N-2-j)\,(N-1-j)}{2}} \, (y - \xi^j)^{\frac{(N-4-j)\,(N-i-j)}{2}}}{(x - \varepsilon \xi^{j-1} y)^{\frac{(N-4+j)\,(N-1-j)}{2}}}$$

und zu (2)

$$(x - \varepsilon\xi^{-1}y)^2\,(x - \varepsilon y)\prod_{j=0}^{N-2}(y - \xi^j)^{-(N-1-j)}$$

$$\cdot\,((x - \varepsilon\xi^{-1}y)\,(x - \varepsilon y)\,(x - \varepsilon\xi y))^{N-3}\prod_{j=3}^{N-2}(x - \varepsilon\xi^{j-1}y)^{N-1-j}$$

$$= \prod_{j=0}^{N-2}\left(\frac{x - \varepsilon\xi^{j-1}y}{y - \xi^j}\right)^{N-1-j}$$

zu beachten.

Beide Gleichungen entstehen offensichtlich durch einfache Zusammenfassung. Gleichzeitig waren das auch die letzten Spaltenumformungen.

Die abschließenden Zeilenumformungen sehen wie folgt aus. Es wird die zweite Zeile zur dritten Zeile addiert. Danach addiert man die dritte zur letzten Zeile. Subtrahiert man schließlich die letzte Zeile von der ersten Zeile, so ergibt sich die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ -N & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & N & 0 & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{N-3} & & \vdots \\ \frac{N(N-3)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ist N ungerade, so wird die zweite Zeile mit $\frac{N-3}{2}$ multipliziert und zur letzten Zeile addiert, sowie die zweite Zeile mit -1 multpliziert. Bei geradem N wird die zweite Zeile mit $\frac{N}{2} - 2$ multipliziert und zur letzten Zeile addiert um $\frac{N}{2}$ zu erhalten. Abschließend wird die zweite Zeile mit der letzten Zeile vertauscht.

Man erhält also in jedem Fall die Matrix

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \begin{matrix} 0 \\ E(N) \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ N \end{matrix} & & \mathbf{O} \\ \hline & & I_{N-3} & 0 \\ & \mathbf{O} & & \vdots \\ & & 0 \quad \dots & 0 \end{array}\right).$$

$\square$

Literatur

[F] **Forster O.,**
Riemannsche Flächen,
Springer Verlag 1977

[K] **Kendig K.,**
Elementary Algebraic Geometry
GTM, Springer Verlag 1984

[L] **Lang S.,**
Introduction to Algebraic an Abelian Functions,
Springer Verlag 1982

[Ro 1] **Rohrlich D.E.,**
Points at Infinity on the Fermat Curves,
Invent. Math. 39 (1977) pp. 95 - 127

[Ro 2] **Rohrlich D.E.,**
Modular Functions and the Fermat Curves,
Dissertation, Yale University 1976

[St Z] **Stöcker R., Zieschang H.,**
Algebraische Topologie,
Teubner Verlag 1988

[Y] **Yang K.,**
Compact Riemann Surfaces and Algebraic Curves,
World Scientific Publishing
Co Pte Ltd., Singapore 1988