



FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

LEHRGEBIET KOMPLEXE ANALYSIS

Prof. Dr. Andrei Duma

Diplomarbeit

zur Erlangung des Grades eines Diplom-Mathematikers
zum Thema

Löwner-Familien

vorgelegt von

Ulrich Telle

Wolfskaul 12

51061 Köln

Matrikel-Nr. 1471341

Köln, den 28. September 2007

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	ii
Symbolverzeichnis	iii
Familien-Übersicht	iv
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Aufbau der Arbeit	6
2 Löwner-Familien	7
2.1 Wichtige Teilfamilien von \mathcal{R} und ihre Eigenschaften	7
2.2 Familien parametrisierter Koebe-Funktionen als Löwner-Familien	14
2.3 Unterordnung und Definition der Löwner-Familien	26
2.4 Der Dirichlet-Raum und das Flächentheorem	29
2.5 Verallgemeinerung des Dirichlet-Raums und des Flächentheorems	34
2.6 Die Bieberbachsche Vermutung für $n = 2$	44
2.7 Größe des Bildbereichs	48
2.8 Verzerrungssatz	50
2.9 Konvergenzsatz von Carathéodory	58
2.10 Technische Lemmata	67
2.11 Parameterdarstellung der Löwner-Familien	81
2.12 Konstruktion von Löwner-Familien	84
A Grundlegende Sätze	87
A.1 Funktionentheorie	87
A.2 Analysis und Funktionalanalysis	90
B Biographie von Löwner	92
C Literatur	97

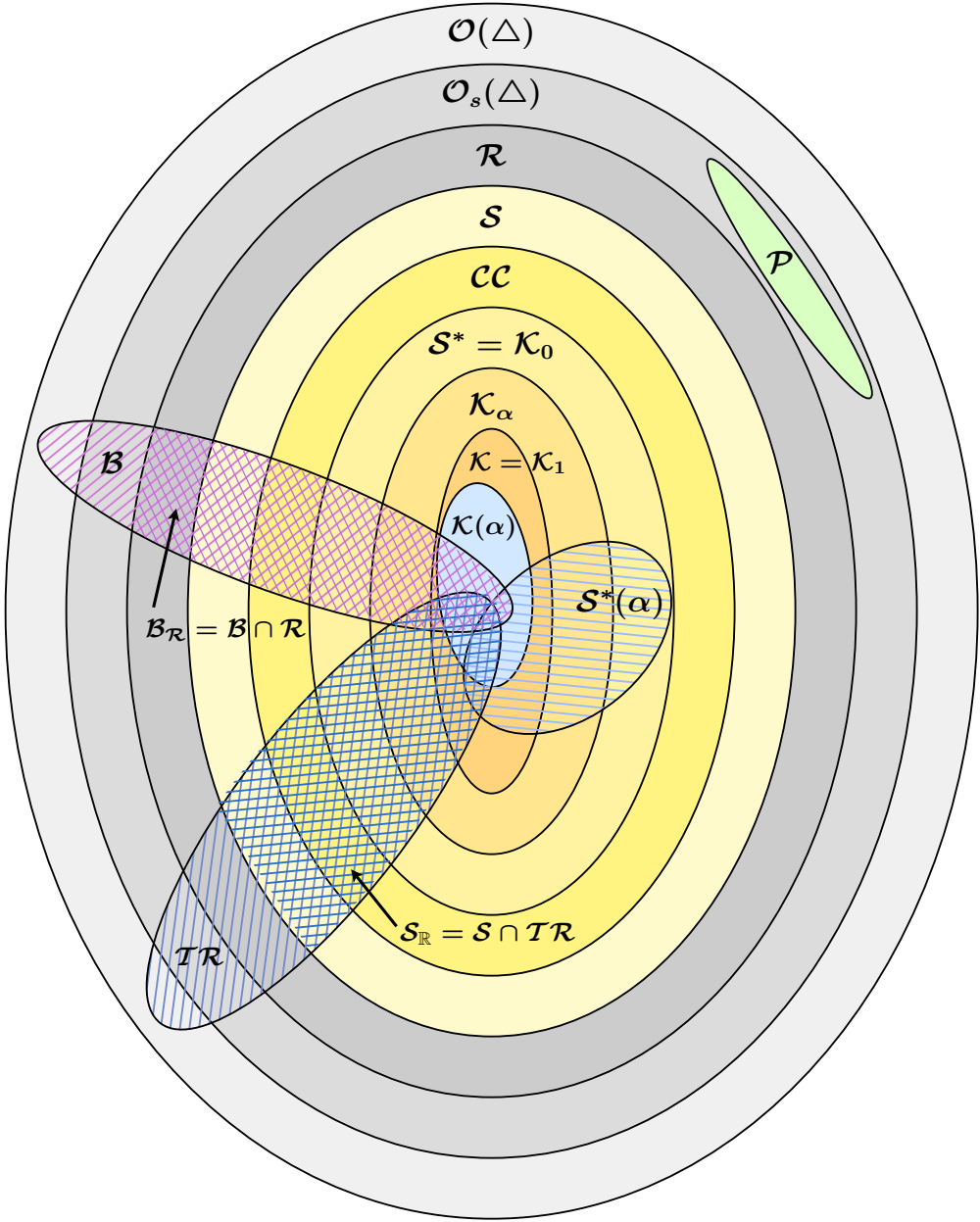
Abbildungsverzeichnis

1.1	Biholomorphe Gebietsabbildung	2
2.1	Bildbereich der Koebe-Funktion K_τ	17
2.2	Komposition der parametrisierten Koebe-Funktion	18
2.3	Bildbereich einer Funktion aus \mathcal{B}	19
2.4	Konstruktion von S im Beweis zu Satz 2.2.14	21
2.5	Veranschaulichung der Indexmenge T	23
2.6	Konstruktion von $B_{b,a}$	24
2.7	Bild von $B_{b,a}(\triangle)$	25
2.8	Konstruktion einer einfach-zusammenhängenden Teilmenge von \triangle_ρ	40
2.9	Weg γ als Urbild von L unter der Abbildung f	56
2.10	Disjunktheit und Abstand von K und C_r	62
2.11	Veranschaulichung des Jordan-Weges γ_n	74
2.12	Veranschaulichung der Jordan-Wege α_n, β_n und γ_n	75
B.1	Karl Löwner	92

Symbolverzeichnis

Symbol	Beschreibung
Δ	Einheitskreis $\Delta_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \mid z < 1\}$
$\partial\Delta$	Rand des Einheitskreises Δ
$\Delta_r(a)$	Kreis mit Radius r um den Punkt a : $\Delta_r(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid z - a < r\}$
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen (≥ 1)
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen (> 0)
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
$\tilde{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
\mathcal{B}	Familie der Schwarz-Funktionen
$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$	Familie $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$
\mathcal{CC}	Familie der fast-konvexen Funktionen
\mathcal{F}_K	Familie der Koebe-Funktionen
\mathcal{G}	Familie der parametrisierten Koebe-Funktionen
\mathcal{K}	Familie der konvexen Funktionen
\mathcal{K}_{α}	Familie der α -konvexen Funktionen
$\mathcal{K}(\alpha)$	Familie der konvexen Funktionen der Ordnung α
$\mathcal{O}(\Delta)$	Familie der auf Δ holomorphen Funktionen
$\mathcal{O}_s(\Delta)$	Familie der auf Δ schlichten, holomorphen Funktionen
\mathcal{P}	Familie der Carathéodory-Funktionen
\mathcal{R}	Familie der normalisierten Riemannschen Abbildungsfunktionen
\mathcal{S}	Familie der normierten schlichten Funktionen
\mathcal{S}^*	Familie der sternförmigen Funktionen
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	Familie der sternförmigen Funktionen der Ordnung α
$\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$	Familie der schlichten, typisch-reellen Funktionen
\mathcal{TR}	Familie der typisch-reellen Funktionen

Familien-Übersicht



1 Einleitung

1.1 Motivation

Der Riemannsche Abbildungssatz, ein zentraler Satz der ebenen Funktionentheorie – der sinngemäß auch noch unverändert Gültigkeit auf Riemannschen Flächen besitzt [For77, S.187], der jedoch bereits im \mathbb{C}^2 seine Allgemeingültigkeit verliert [RS07, S.186] – warf eine Vielzahl mathematischer Probleme auf.

Kann man zu zwei einfach-zusammenhängenden Gebieten (ungleich \mathbb{C}) eine biholomorphe Abbildung auch wirklich konstruieren? Diese Frage wurde von Koebe mittels eines, den Existenzsatz von Montel umgehenden, konstruktiven Beweises positiv beantwortet [RS07, S.196]. Dieser Beweis konnte sich jedoch in der Funktionentheorieliteratur nicht durchsetzen, da sich das Konstruktionsverfahren in praxi in den meisten Fällen als völlig unbrauchbar erwies. Ausführlich untersucht wurde die Konvergenzgeschwindigkeit der zugehörigen Koebe-Algorithmen von Henrici [RS07, S.200].

Ein weiteres Problem war natürlich die Klärung der Frage, welche Struktur die Funktionen, die überhaupt als biholomorphe Funktionen zwischen zwei einfach-zusammenhängenden Gebieten (ungleich \mathbb{C}) als Kandidaten in Frage kommen, besitzen müssen. Der Riemannsche Abbildungssatz erlaubt es von vornherein, sich auf Funktionen, die auf dem offenen Einheitskreis Δ definiert sind, zu beschränken, da man bei gegebenen einfach-zusammenhängenden Gebieten G_1, G_2 (jeweils ungleich \mathbb{C}) je zwei solcher biholomorpher Abbildungen $g_1 : \Delta \rightarrow G_1, g_2 : \Delta \rightarrow G_2$ zu einer biholomorphen Abbildung $f : G_1 \rightarrow G_2$ komponieren kann (vgl. Abbildung 1.1).

Die Eindeutigkeitsaussage des Riemannschen Abbildungssatzes gestattet es darüberhinaus, sich auf Funktionen mit der Eigenschaft

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g'(0) > 0 \tag{1.1}$$

zu beschränken. Zudem genügt es, Funktionen zu betrachten, welche die Eigen-

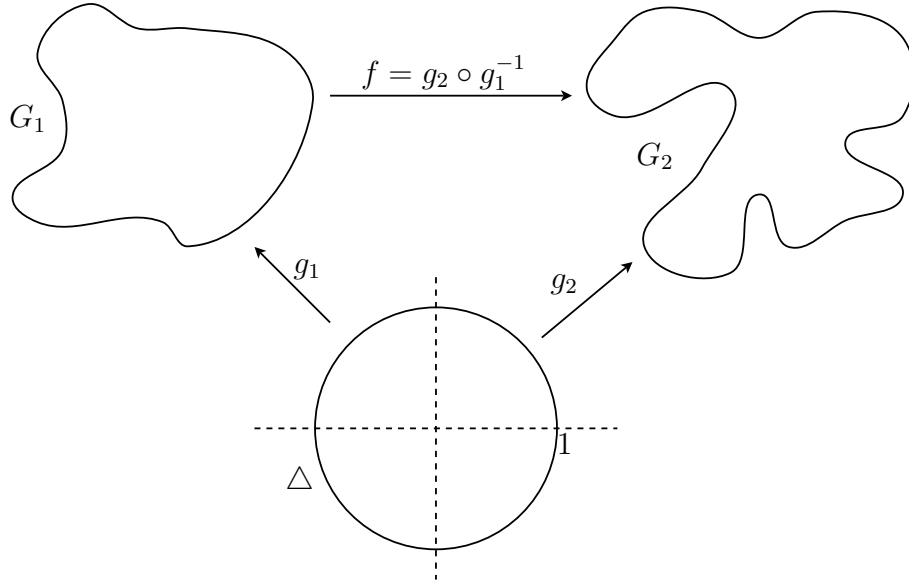


Abbildung 1.1: Biholomorphe Gebietsabbildung mit Hilfe des Riemannsches Abbildungssatzes

schaft (1.1) besitzen und injektiv sind, denn aufgrund des globalen Umkehrsatzes sind diese Funktionen biholomorph. Injektive, holomorphe Abbildungen werden *schlicht* genannt. Schlichte Funktionen aus $\mathcal{O}(\Delta)$, die zusätzlich der Bedingung (1.1) genügen, werden hier – um Kompatibilität mit dem dieser Arbeit zugrunde liegenden Werk [RR94] zu erzielen – als *normalisierte Riemannsche Abbildungsfunktionen* und formelmäßig mit \mathcal{R} bezeichnet. In der Literatur ([DD04], [Dur83]) wird häufig anstatt der Familie \mathcal{R} die Familie \mathcal{S} aller schlichten Funktionen g aus $\mathcal{O}(\Delta)$ betrachtet, welche der strengeren Normierung

$$g(0) = 0 \quad \text{und} \quad g'(0) = 1 \quad (1.2)$$

genügen. Da die Multiplikation mit einer komplexen Zahl ungleich Null nichts an den Biholomorphieeigenschaften einer Funktion verändert, können Aussagen über einzelne Funktionen aus den Familien \mathcal{R} und \mathcal{S} als gleichwertig angesehen werden. Aussagen über die Familien \mathcal{R} und \mathcal{S} entsprechen sich dagegen nicht unbedingt. So ist z.B. \mathcal{S} kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$ [DD04, KE3, S.51], wobei $\mathcal{O}(\Delta)$ wie üblich mit der Topologie der kompakten Konvergenz [DR72, §4] versehen ist, \mathcal{R} jedoch ist noch nicht einmal normal, wie man anhand der Funktionenfamilie $\{n \cdot \text{id}_\Delta \mid n \in \mathbb{N}\}$ aus \mathcal{R} sofort bestätigt.

Es war nun völlig natürlich, nach hinreichenden und notwendigen Kriterien zu suchen, die einer Funktion die Zugehörigkeit zu \mathcal{R} sichern bzw. denen eine Funktion aus \mathcal{R} genügen muss. Die vorliegende Arbeit möchte einen Bezug zur tieflied-

sten notwendigen Bedingung für die Familie \mathcal{R} herstellen, die Bieberbach bereits im Jahre 1916 vermutete [Dur83, S.69] und die 68 Jahre lang unbewiesen blieb. Die *Bieberbachsche Vermutung* besagte:

Für die Taylorentwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ einer Funktion aus \mathcal{R} gilt

$$|a_n| \leq n \cdot a_1 \quad \text{für alle } n \geq 2.$$

Oder äquivalent:

Für die Taylorentwicklung $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ einer Funktion aus \mathcal{S} gilt

$$|b_n| \leq n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Um die Bieberbachsche Vermutung zu beweisen, wurden verschiedene Wege beschritten. Die wesentlichsten waren sicherlich:

1. Das Untersuchen verschiedener Teilfamilien von \mathcal{S} .
2. Das sukzessive Überprüfen der Koeffizienten b_2, b_3, \dots der Taylorentwicklungen der Funktionen aus \mathcal{S} .
3. Das Abschwächen der Bieberbachschen Vermutung dahingehend, dass lediglich die Existenz eines $K > 0$ mit $|b_n| < K \cdot n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verlangt wird.

Zu 1.:

Vorab sei angemerkt, dass die genaue Definition der nachstehenden Funktionenfamilien in Abschnitt 2.1 erfolgt.

Die Bieberbachsche Vermutung wurde sukzessive bewiesen von

- Löwner für die Familie \mathcal{K} der konvexen Funktionen, wobei Löwner sogar $|b_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweisen konnte [Dur83, S.44];
- Löwner und Nevanlinna für die Familie \mathcal{S}^* der sternförmigen Funktionen [DD04, KE4, S.13];
- Dieudonné für die Familie $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ der schlichten typisch-reellen Funktionen [Dur83, S.52];
- Reade für die Familie \mathcal{CC} der fast-konvexen Funktionen [Dur83, S.51].

Für die bedeutsame Familie

$$\mathcal{P} := \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid f(0) = 1 \text{ und } \operatorname{Re} f(z) > 0 \quad (\forall z \in \Delta)\}$$

der Carathéodory-Funktionen wurde die Bieberbachsche Vermutung (bis auf den Koeffizienten b_0 natürlich) ebenfalls positiv beschrieben. Es gilt sogar $|b_n| \leq 2$ für alle $n \geq 2$ [Dur83, S.41]. (Natürlich gilt $\mathcal{P} \cap \mathcal{R} = \emptyset$.)

Aufgrund der extremen Verschärfung der Bieberbachschen Vermutung für die Familie \mathcal{K} der konvexen Funktionen untersuchte man weitere Familien \mathcal{F} mit $\mathcal{K} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{S}$ hinsichtlich einer möglichen Verschärfung der Bieberbachschen Vermutung. Für einige dieser Familien, die in [DD04] ausführlich untersucht werden, werden in Abschnitt 2.1 Kompaktheitsbeweise angegeben, die in der im Rahmen dieser Arbeit zugänglichen Literatur nicht aufzufinden waren. Der Nachweis der Kompaktheit einer Familie ist aus folgenden Gründen nützlich:

Sieht sich ein Funktionentheoretiker mit einer Familie \mathcal{F} holomorpher Funktionen konfrontiert, so fragt er sofort nach deren Normalität. Ist diese nachgewiesen, so will er natürlich auch wissen, ob der Grenzwert jeder (nach Montel existierenden) kompakt konvergenten Teilfolge einer Folge von Funktionen aus \mathcal{F} ebenfalls in \mathcal{F} liegt.

Im Zusammenhang mit der Bieberbachschen Vermutung lässt sich (da sich diese als wahr erwiesen hat) aus der Kompaktheit einer Familie \mathcal{F} schlichter Funktionen aus \mathcal{S} eine noch weitergehende Aussage ableiten. Es sind dann die *stetigen* Funktionale [Koe94]

$$F_n : \mathcal{F} \rightarrow [0, n], \quad f \mapsto |a_n(f)|$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ wohldefiniert, wobei $a_n(f)$ den n -ten Koeffizienten der Taylorentwicklung von f bezeichnet und die Stetigkeit der F_n und die Kompaktheit von \mathcal{S} garantieren, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ auch alle Maxima $\max_{f \in \mathcal{F}} |a_n(f)|$ existieren.

Zu 2.:

- Schon Bieberbach bewies $|b_2| \leq 2$ [DD04, KE3, S.43].
- Löwner bewies $|b_3| \leq 3$ [Löw23]. Bei diesem Beweis kamen bereits Differentialgleichungstechniken, die sich beim endgültigen Beweis von de Brange als so überaus nützlich erwiesen haben, zum Einsatz und zwar bei der Behandlung der *Löwner-Kufarev-Differentialgleichung*

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = -w(z, t)p(w(z, t), t)$$

mit $p(\cdot, t)$ als einer von einem reellen Parameter t abhängigen holomorphen Funktion p sowie der *speziellen Löwner-Differentialgleichung*

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = -w(z, t) \cdot \frac{1 + \kappa(t)}{1 - \kappa(t)}$$

mit der Anfangsbedingung $w(z, 0) = z$ und einer stetigen Funktion κ , deren Bild in $\partial\Delta$ liegt [Dur83, S.81-95]. Diese Differentialgleichungstechnik nennt man *Löwner-Methode*.

- Garabedian und Schiffer gelang der Nachweis von $|b_4| \leq 4$, der wiederum die Löwner-Methode, aber auch andere Methoden verwendete [Koe94].
- Pederson und Schiffer verifizierten $|b_5| \leq 5$ [Koe94].
- Pederson und Ozawa bewiesen $|b_6| \leq 6$ [Koe94].

Die Fälle $n \in \{5, 6\}$ wurden ohne die Verwendung der Löwner-Methode bewiesen. Duren [Dur83, S.95] verweist jedoch darauf, dass Nehari 1973 einen Beweis für den Fall $n = 4$ vorstellte, der ausschließlich die Löwner-Methode verwendete. In seiner Monographie [Dur83], die 1983 – also genau ein Jahr vor dem de Brangeschen Beweis – erschien, hebt Duren bereits die Macht der Löwner-Methode hervor [Dur83, S.94f]:

In principle, the Loewner method offers a general method of attack on the Bieberbach conjecture. An explicit formula for a can be calculated in terms of κ ¹ alone, but it contains multiple integrals and becomes rather formidable as n increases.

Zu 3.:

- Littlewood bewies bereits 1925 die Gültigkeit von $|b_n| < e \cdot n$ für $n = 2, 3, \dots$ [Dur83, S.37].
- Hayman bewies 1955 darüber hinaus, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|b_n|}{n} \leq 1$ gilt und dass die Gleichheit nur für Drehungen der Koebe-Funktionen gilt [Pom75, S.25].
- Unmittelbar vor dem de Brangeschen Beweis gelang Horowitz 1978 die Abschätzung $|b_n| < 1,0657 \cdot n$ für $n = 2, 3, \dots$ [Dur83, S.187].

Ein vollständiger Beweis gelang erst de Brange im Jahre 1984 [DD04, KE3, S.44]. Eine wesentliche Vereinfachung dieses Beweises gelang Weinstein im Jahre 1991 [Wei91].

¹ κ wie im Falle von $n = 3$

Eine wichtige Rolle auf dem Weg zum Beweis der Bieberbachschen Vermutung spielten die Löwner-Familien, die erstmalig von Löwner im Zusammenhang mit der Familie der Koebe-Funktionen untersucht wurden. Die Koebe-Funktionen spielen bei vielen Abschätzungen in der Theorie der schlichten Funktionen die Rolle von Extremalfunktionen in dem Sinne, dass diese Abschätzungen scharf sind.

Die vorliegende Arbeit arbeitet wichtige Eigenschaften der Löwner-Familien heraus, wobei mit der Familie der Koebe-Funktionen begonnen wird, da diese Familie bereits alle prägenden Merkmale der allgemeinen Löwner-Familien aufweist.

1.2 Aufbau der Arbeit

Das Kapitel 1 beginnt mit einer motivierenden Einleitung in die Thematik und beschreibt dann den Aufbau der Arbeit.

In Kapitel 2 werden zunächst in Abschnitt 2.1 wichtige Teilfamilien von \mathcal{R} untersucht. Bevor in Abschnitt 2.3 die Löwner-Familien formal definiert werden, wird in Abschnitt 2.2 die Familie der parametrisierten Koebe-Funktionen als Vertreter einer Löwner-Familie betrachtet. Der Begriff des Dirichlet-Raums ist für die weiteren Betrachtungen bedeutsam und wird daher in Abschnitt 2.4 eingeführt und in Abschnitt 2.5 verallgemeinert. Mit Hilfe des Pickschen Theorems wird in Abschnitt 2.6 die Bieberbachsche Vermutung für den zweiten Taylorkoeffizienten bewiesen, da dieses Resultat sowohl für den Beweis des Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satzes in Abschnitt 2.7, der eine Aussage über die minimale Größe des Bildbereichs normalisierter Riemannscher Abbildungsfunktionen macht, sowie den Beweis des Verzerrungssatzes in Abschnitt 2.8 benötigt wird. Als ein weiteres mächtiges Hilfsmittel wird in Abschnitt 2.9 der Carathéodorysche Konvergenzsatz bewiesen, dessen Essenz eine vollständige Charakterisierung der kompakten Konvergenz einer Funktionenfolge aus \mathcal{R} einzig und allein in Termen der Bildbereiche der Funktionenfolgenglieder ist. In Abschnitt 2.10 werden schließlich vier Lemmata bewiesen, die für den Beweis des Hauptergebnisses in Abschnitt 2.11, der Parametrisierbarkeit der Löwner-Familien, benötigt werden. Zur Abrundung wird im Abschnitt 2.12 noch kurz – ohne Angabe von Beweisen – darauf eingegangen, wie sich Löwner-Familien explizit angeben lassen.

In den Anhängen ab Seite 87 findet sich zunächst eine kleine Sammlung grundlegender Sätze, die in dieser Arbeit ohne Beweis verwendet werden. Danach wird die Biographie von Löwner wiedergegeben. Den Abschluss bildet das Literaturverzeichnis.

2 Löwner-Familien

2.1 Wichtige Teilfamilien von \mathcal{R} und ihre Eigenschaften

Bereits in der Einleitung wurden die (wohl) wichtigsten Teilfamilien \mathcal{S}^* , \mathcal{K} , \mathcal{CC} , $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ der Familie \mathcal{S} erwähnt. Diese werden in der folgenden Definition präzisiert. Zusätzlich werden einige weitere klassische Teilfamilien von \mathcal{S} und eine Familie, die nicht in \mathcal{S} liegt, aber dennoch die Bieberbachsche Vermutung erfüllt, kurz vorgestellt.

Definition 2.1.1:

- a) $\mathcal{S}^* := \{f \in \mathcal{S} \mid f \text{ bildet } \triangle \text{ auf bzgl. } f(0) \text{ sternförmige Mengen ab}\}$ heißt Familie der sternförmigen Funktionen.
- b) $\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{S} \mid f \text{ bildet } \triangle \text{ auf konvexe Mengen ab}\}$ heißt Familie der konvexen Funktionen.
- c) $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} := \{f \in \mathcal{S} \mid f \in \mathcal{TR}\}$ heißt Familie der schlichten, typisch-reellen Funktionen, wobei
- d) $\mathcal{TR} := \{f \in \mathcal{O}(\triangle) \mid f(0) = 0, f'(0) = 1 \text{ und } f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in (-1, 1)\}$ heißt Familie der typisch-reellen Funktionen.

Die Familie \mathcal{TR} wurde ausgiebig von Rogosinski [Rog32] untersucht, wobei er nachweisen konnte, dass auch die Familie \mathcal{TR} der Bieberbachschen Vermutung genügt.

Weiter wies er nach, dass sämtliche Koeffizienten der Taylorreihe einer Funktion $f \in \mathcal{TR}$ stets reell sind, umgekehrt hieraus aber noch nicht die \mathcal{TR} -Eigenschaft folgt, was man sofort anhand des Beispiels $f(z) = z(1 + z^2)$ einsieht.

Es gilt $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{TR}$ [DD04, KE5, S.35].

e) $\mathcal{CC} := \{f \in \mathcal{S} \mid \exists \varphi \in \mathcal{K} \text{ mit } \operatorname{Re} \frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0 \ (\forall z \in \Delta)\}$ heißt Familie der fast-konvexen Funktionen.¹

Man hat $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{CC} \subset \mathcal{S}$ [DD04, KE4, S.33]. Während \mathcal{K} und \mathcal{S}^* offensichtlich eine sofortige geometrische Interpretation gestatten und $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ durch das Reellsein aller Taylorkoeffizienten eine hervorstechende arithmetische Eigenschaft besitzt, ist dergleichen bei der Familie \mathcal{CC} nicht unmittelbar einsichtig. Dieses gelang erst Lewandowski mittels des von Biernacki eingeführten Begriffs der *linearen Zugänglichkeit*.

f) Ein einfach-zusammenhängendes Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ heißt linear zugänglich, falls $\mathbb{C} \setminus G$ die Vereinigung von Halbgeraden ist, so dass

- der Anfangspunkt jeder Halbgeraden aus ∂G ist
- je zwei verschiedene Halbgeraden disjunkt sind.

Hiermit konnte nun auch \mathcal{CC} eine geometrische Deutung gegeben werden, denn Lewandowski bewies den Satz [DD04, KE4, S.36]

$$f \in \mathcal{CC} \Leftrightarrow f(\Delta) \text{ ist linear zugänglich.}$$

g) Für $\alpha > 0$ heißt

$$\mathcal{K}_\alpha := \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \frac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0 \text{ und } \operatorname{Re} J(\alpha, f, z) > 0 \ (\forall z \in \Delta) \right\}$$

mit

$$J(\alpha, f, \cdot) : \Delta \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto (1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha \left[z \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right]$$

Familie der α -konvexen Funktionen.

h) Für $0 \leq \alpha < 1$ heißt

$$\mathcal{S}^*(\alpha) := \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha \ (\forall z \in \Delta) \right\}$$

Familie der sternförmigen Funktionen der Ordnung α .

¹ \mathcal{CC} gehört neben \mathcal{K} und \mathcal{S}^* zu den wichtigsten Unterfamilien von \mathcal{S} . Während die Definitionen von \mathcal{K} und \mathcal{S}^* selbsterklärend sind, gelang dem amerikanischen Mathematiker W. Kaplan auch eine intrinsische Charakterisierung von \mathcal{CC} , welche lautet [DD04, KE4, S.36]:

Sei $f \in \mathcal{S}$. Dann gilt:

$f \in \mathcal{CC} \Leftrightarrow$ für alle θ_1, θ_2 mit $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < 2\pi$ und für jedes $r \in (0, 1)$ gilt

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \operatorname{Re} \left[1 + \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right] d\theta > -\pi.$$

i) Ebenfalls für $0 \leq \alpha < 1$ heißt

$$\mathcal{K}(\alpha) := \left\{ f \in \mathcal{S} \mid \operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > \alpha \ (\forall z \in \Delta) \right\}$$

Familie der konvexen Funktionen der Ordnung α .

Alle Familien aus Definition 2.1.1 sind bis auf \mathcal{TR} Teilfamilien von \mathcal{S} und somit wegen der Kompaktheit von \mathcal{S} bereits normal. \mathcal{K} und \mathcal{S}^* sind zudem kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$ [DD04, KE4, S.29]. Darüberhinaus ist auch die Familie \mathcal{P} der Carathéodory-Funktionen kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$ [DD04, KE4, S.51].

Im Folgenden soll auch für die übrigen in der Definition 2.1.1 aufgeführten Familien kurz gezeigt werden, dass sie in $\mathcal{O}(\Delta)$ kompakt sind.

Die Beweise stützen sich naturgemäß (ohne explizite Erwähnung) auf die Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) und das Konvergenzkriterium in Satz A.1.5. Weiterhin wird intensiv das Minimumprinzip für harmonische Funktionen verwendet.

Aufgrund des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) genügt es, die Abgeschlossenheit der Familien zu zeigen.

Kompaktheit von \mathcal{CC} : Es sei die Folge (f_n) aus \mathcal{CC} kompakt konvergent gegen $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. Wegen der Abgeschlossenheit von \mathcal{S} und $\mathcal{CC} \subset \mathcal{S}$ folgt bereits $f \in \mathcal{S}$. Nach dem Klassifizierungssatz für \mathcal{CC} [DD04, KE4, S.32] gibt es zu jedem f_n ein $g_n \in \mathcal{S}^*$ mit

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{id}_\Delta f'_n}{g_n} \right) > 0.$$

Wegen der Kompaktheit von \mathcal{S}^* liegt der Limes g von (g_n) in \mathcal{S}^* . Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz konvergiert $\frac{\operatorname{id}_\Delta f'_n}{g_n}$ kompakt gegen $\frac{\operatorname{id}_\Delta f'}{g}$. Aus Stetigkeitsgründen folgt

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{id}_\Delta f'}{g} \right) \geq 0.$$

Es werden zwei Fälle unterschieden:

1. Sei

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{id}_\Delta f'(z)}{g(z)} \right) > 0 \ (\forall z \in \Delta).$$

Dann liefert der Klassifizierungssatz für \mathcal{CC} unmittelbar $f \in \mathcal{CC}$.

2. Es existiere ein $w \in \Delta$ mit

$$\operatorname{Re} \left(\frac{wf'(w)}{g(w)} \right) = 0.$$

Das Minimumprinzip für harmonische Funktionen liefert dann

$$\operatorname{Re} \left(\frac{w f'(w)}{g(w)} \right) = 0 \quad (\forall w \in \Delta),$$

d.h. die Konstanz von $\frac{\operatorname{id}_\Delta f'}{g}$. Wegen $g \in \mathcal{S}^*$, $f \in \mathcal{S}$ folgt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{g(z)}{z} = 1, \quad \text{d.h.,} \quad \frac{\operatorname{id}_\Delta f'}{g} \equiv 1.$$

Also gilt $\operatorname{id}_\Delta f' = g$. Der Dualitätssatz von Alexander [DD04, KE4, S.27] liefert $f \in \mathcal{K}$, also wegen $\mathcal{K} \subset \mathcal{CC}$ auch $f \in \mathcal{CC}$.

\mathcal{CC} ist folglich kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Kompaktheit von $\mathcal{K}(\alpha)$: Sei die Folge (f_n) aus $\mathcal{K}(\alpha)$ kompakt konvergent gegen ein $f \in \mathcal{O}(\Delta)$. Wegen $\mathcal{K}(\alpha) \subset \mathcal{K}$ und der Kompaktheit von \mathcal{K} gilt dann bereits $f \in \mathcal{K}$.

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz für Ableitungen konvergieren (f'_n) und (f''_n) kompakt gegen f' bzw. f'' . Also konvergiert $\left(\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''_n}{f'_n} \right)$ kompakt gegen $\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''}{f'}$. Die harmonischen Funktionen

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''_n}{f'_n} \right)$$

konvergieren dann natürlich punktweise gegen

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''}{f'} \right).$$

Die Voraussetzung

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''_n}{f'_n} \right) > \alpha \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

impliziert aus Stetigkeitsgründen

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + \operatorname{id}_\Delta \cdot f''}{f'} \right) \geq \alpha.$$

Annahme:

Es gibt ein $w \in \Delta$ mit $\operatorname{Re} \left(\frac{1 + w f''(w)}{f'(w)} \right) = \alpha$.

Das Minimumprinzip für harmonische Funktionen liefert dann

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1 + \operatorname{id}_{\Delta} \cdot f''}{f'} \right) \equiv \alpha.$$

Aus $f \in \mathcal{K}$ folgt mit dem Dualitätssatz von Alexander [DD04, KE4, S.27] $h := \operatorname{id}_{\Delta} \circ f' \in \mathcal{S}^*$. Man erhält

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{zh'(z)}{h(z)} = 1,$$

da $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{h(z)}{z} = 1$ und $h'(0) = 1$, folglich auch

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{zh'(z)}{h(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(\frac{f'(z) + zf''(z)}{f'(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) = \alpha, \end{aligned}$$

was $\alpha < 1$ widerspricht. Folglich ist $\mathcal{K}(\alpha)$ kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Kompaktheit von \mathcal{K}_{α} : Wegen $\mathcal{K}_0 = \mathcal{S}^*$ genügt es, $\alpha \in (0, 1)$ zu betrachten.

Sei (f_n) eine gegen $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ kompakt konvergente Folge aus \mathcal{K}_{α} . Wegen $\mathcal{K}_{\alpha} \subset \mathcal{S}^*$ und der Kompaktheit von \mathcal{S}^* liegt f bereits in \mathcal{S}^* . Es gilt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = 1 \quad \text{und somit auch} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)f'(z)}{z} = 1.$$

Auf $\Delta \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{f \circ f'}{\operatorname{id}_{\Delta \setminus \{0\}}} \neq 0$$

wegen der Schlichtheit von f und der daraus resultierenden Nullstellenfreiheit von f' sowie wegen $f(0) = 0$. Für alle $(n, z) \in \mathbb{N} \times \Delta$ hat man dann

$$\operatorname{Re} J(\alpha, f_n, z) > 0$$

und folglich aus Stetigkeitsgründen

$$\operatorname{Re} J(\alpha, f, z) \geq 0 \quad (\forall z \in \Delta).$$

Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz ist $J(\alpha, f, \cdot)$ der kompakte Limes von $J(\alpha, f_n, \cdot)$, woraus die Harmonizität von $\operatorname{Re} J(\alpha, f, \cdot)$ resultiert.

Gäbe es ein $w \in \Delta$ mit $\operatorname{Re} J(\alpha, f, w) = 0$, so würde vermittels des Minimum-

prinzips für harmonische Funktionen

$$\operatorname{Re} J(\alpha, f, \cdot) \equiv 0$$

auf \triangle folgen. Wegen $f \in \mathcal{S}^*$ und

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{zf'(z)}{z} = f'(0) = 1$$

würde dieses

$$J(\alpha, f, 0) = (1 - \alpha) + \alpha = 1 > 0,$$

also einen Widerspruch, implizieren.

Damit ist auch \mathcal{K}_α kompakt in $\mathcal{O}(\triangle)$.

Kompaktheit von \mathcal{TR} : Wegen $\mathcal{TR} \subsetneq \mathcal{S}$ ist zunächst die Normalität von \mathcal{TR} zu zeigen.

Sei $K \subset \triangle$ kompakt und $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$ aus \mathcal{TR} . Nach dem Satz von Rogosinski [Rog32] bzw. [DD04, KE5, Satz 5.2.13] gilt $|a_j| \leq j$ ($\forall j \geq 2$). Also gilt für alle $(f, z) \in \mathcal{TR} \times K$

$$|f(z)| \leq |z| + \sum_{j=2}^{\infty} j|z|^j = \sum_{j=1}^{\infty} j|z|^j = \frac{|z|}{(1 - |z|)^2} =: h(z).$$

h ist stetig und nimmt daher auf dem Kompaktum K ein Maximum an, womit \mathcal{TR} als lokal-gleichartig beschränkt nachgewiesen ist. Der Satz von Montel (Theorem A.1.2) liefert die Normalität von \mathcal{TR} .

Nach der Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) ist nur noch die Abgeschlossenheit von \mathcal{TR} zu zeigen.

Sei \mathcal{F} die Familie aller Funktionen aus \mathcal{P} , deren Taylorkoeffizienten sämtlich reell sind. Es wird zunächst die Kompaktheit von \mathcal{F} gezeigt. Als Unterfamilie von \mathcal{P} ist \mathcal{F} jedenfalls normal.

Sei nun (f_n) eine kompakt konvergente Folge aus \mathcal{F} mit Grenzfunktion f . Wegen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ und der Kompaktheit von \mathcal{P} liegt f in \mathcal{P} , d.h., es gilt $\operatorname{Re} f > 0$ auf \triangle . Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es nach einem weiteren Satz von Rogosinski [Dur83, S.56] Funktionen h_n aus \mathcal{TR} mit

$$f_n(z) = \frac{1 - z^2}{z} \cdot h_n(z) \quad (\forall z \in \triangle).$$

Da \mathcal{TR} normal ist, gibt es eine kompakt konvergente Teilfolge (h_{n_k}) , die kompakt gegen ein $h \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert. Andererseits konvergiert auch (f_{n_k}) kompakt gegen f . Somit hat man

$$f \xleftarrow{\text{kompakt}} f_{n_k} = \frac{1 - \text{id}_\Delta^2}{\text{id}_\Delta} \cdot h_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} \frac{1 - \text{id}_\Delta^2}{\text{id}_\Delta} \cdot h,$$

woraus wegen der Eindeutigkeit des Limes in metrischen Räumen (unter Beachtung der Tatsache, dass die Topologie der kompakten Konvergenz metrisierbar ist [DR72, S.218, Satz 10]) folgt

$$f(z) = \frac{1 - z^2}{z} h(z) \quad (\forall z \in \Delta).$$

Wieder aufgrund des Satzes von Rogosinski [Dur83, S.53] folgt $f \in \mathcal{F}$, womit die Kompaktheit von \mathcal{F} nachgewiesen ist.

Es sei nun (g_n) eine Folge in \mathcal{TR} , die kompakt gegen $g \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert. Der Satz von Rogosinski [Dur83, S.56] gewährleistet die Existenz von Funktionen s_n aus \mathcal{F} mit

$$s_n(z) = \frac{1 - z^2}{z} g_n(z).$$

Wegen $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}$ gilt dann

$$\text{Re} \left(\frac{1 - z^2}{z} g_n(z) \right) > 0 \quad (\forall z \in \Delta).$$

Wegen $1 = s_n(0)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) folgt

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1 - z^2}{z} g_n(z) \right) = 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Da \mathcal{F} kompakt ist, besitzt (s_n) eine Teilfolge (s_{n_k}) , die kompakt gegen ein $s \in \mathcal{F}$ konvergiert. Wegen der Eindeutigkeit des Limes folgt

$$s = \frac{1 - \text{id}_\Delta^2}{\text{id}_\Delta} g.$$

Wegen $s \in \mathcal{F}$ folgt mit dem Satz von Rogosinski [Dur83, S.56] $g \in \mathcal{TR}$, womit auch die Kompaktheit von \mathcal{TR} verifiziert ist.

Kompaktheit von $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$: Offensichtlich gilt $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \mathcal{S} \cap \mathcal{TR}$ und somit ist $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ als Durchschnitt zweier Kompakta selbst kompakt.

2.2 Familien parametrisierter Koebe-Funktionen als Löwner-Familien

Im Folgenden werden zunächst die Koebe-Funktionen definiert und sodann ihre wichtigsten Eigenschaften gezeigt.

Definition 2.2.1:

Die für $\tau \in \mathbb{R}$ auf \triangle definierten Funktionen

$$K_\tau(z) = \frac{z}{(1 - e^{i\tau}z)^2}$$

heißen Koebe-Funktionen. K_0 wird als die Koebe-Funktion bezeichnet und als K geschrieben.

Lemma 2.2.2:

Die Koebe-Funktion K ist schlicht.

Beweis. Für $z, w \in \triangle$ mit $z \neq w$ gilt

$$\begin{aligned} K(z) = K(w) &\Leftrightarrow \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{w}{(1-w)^2} \\ &\Leftrightarrow z(1-2w+w^2) = w(1-2z+z^2) \\ &\Leftrightarrow z+zw^2 = w+wz^2 \\ &\Leftrightarrow z-w = wz(z-w) \\ &\Leftrightarrow 1 = wz \end{aligned} \quad \text{wegen } z \neq w.$$

Wegen $z, w \in \triangle$ folgt daraus ein Widerspruch. □

Aus Lemma 2.2.2 folgt unmittelbar

Lemma 2.2.3:

Alle Koebe-Funktionen sind schlicht.

Beweis. Offensichtlich gilt für alle $\tau \in \mathbb{R}$

$$K_\tau(z) = e^{-i\tau} K(e^{i\tau}z). \quad (2.1)$$

Also ist K_τ schlicht, da die Multiplikation einer schlichten Funktion mit einer Konstanten ungleich Null die Eigenschaft der Schlichtheit nicht ändert. □

Lemma 2.2.4:

Die Familie $\mathcal{F}_K := \{K_\tau \mid \tau \in \mathbb{R}\}$ der Koebe-Funktionen ist eine Teilmenge von \mathcal{S} .

Beweis. $K(0) = 0$ und damit auch $K_\tau(0) = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Koebe-Funktionen.

Differentiation von $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ und anschließende Multiplikation mit z ergibt

$$K(z) = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad \text{also} \quad K'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^{n-1},$$

d.h., $K'(0) = 1$, insgesamt also $K \in \mathcal{S}$.

Aufgrund der Beziehung (2.1) folgt für die Taylorentwicklung

$$K_\tau(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{i(n-1)\tau} z^n \quad \text{und} \quad K'_\tau(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{i(n-1)\tau} z^{n-1}, \quad (2.2)$$

also $K_\tau(0) = 0$ und $K'_\tau(0) = 1$ und damit $K_\tau \in \mathcal{S}$ für alle $\tau \in \mathbb{R}$. □

Lemma 2.2.5:

Die Familie \mathcal{F}_K der Koebe-Funktionen ist kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Beweis. Sei $L \subset \Delta$ ein Kompaktum. Aus der Ungleichung

$$|K_\tau(z)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |n e^{i(n-1)\tau} z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |n z^n| = \sum_{n=1}^{\infty} n |z|^n = K(|z|) \quad (\forall z \in L, \forall \tau \in \mathbb{R})$$

und der Stetigkeit von $K \circ |\cdot|$ auf L folgt unmittelbar die lokal-gleichartige Beschränktheit von \mathcal{F}_K und damit nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) die Normalität von \mathcal{F}_K .

Weiter sei (K_{τ_n}) eine Folge aus \mathcal{F}_K , die kompakt gegen ein $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert. Da \mathcal{S} kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$ ist und $\mathcal{F}_K \subset \mathcal{S}$ gilt, folgt zunächst $f \in \mathcal{S}$.

Wegen der Kompaktheit von $\partial\Delta$ gibt es eine Teilfolge $(\tau_{n_k})_k$ von (τ_n) , so dass $(e^{i\tau_{n_k}})_k$ gegen eine Zahl $e^{i\varphi} \in \partial\Delta$ konvergiert. Damit konvergiert natürlich auch $(e^{-i\tau_{n_k}})_k$, und zwar gegen $e^{-i\varphi}$. Auf jedem Kompaktum von Δ konvergiert dann $(e^{i\tau_{n_k}} z)_k$ gleichmäßig gegen $e^{i\varphi} z$ und damit auch $(e^{-i\tau_{n_k}} K(e^{i\tau_{n_k}} z))_k$ gegen $f(z)$. Es folgt für alle $z \in \Delta$:

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} K_{\tau_{n_k}}(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} e^{-i\tau_{n_k}} K(e^{i\tau_{n_k}} z) = e^{-i\varphi} K(e^{i\varphi} z) = K_\varphi(z).$$

Damit liegt f in \mathcal{F}_K und die Abgeschlossenheit von \mathcal{F}_K ist nachgewiesen. Dies ergibt zusammen mit der Normalität aufgrund der Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) die Kompaktheit von \mathcal{F}_K . \square

Eine elementare Rechnung zeigt weiter

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1+2z+z^2-1-z^2+2z}{4(1-z)^2} \\ &= \frac{(1+z)^2}{4(1-z)^2} - \frac{(1-z)^2}{4(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Bezeichnet man eine affin-lineare Abbildung $z \mapsto z+b$ mit $L_b(z)$ und die Restriktion der Möbiustransformation $\frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ auf \triangle als $Q(z)$, so hat man mit $q(z) = z^2$ also

$$K = L_{-\frac{1}{4}} \circ q \circ Q \quad (\text{siehe auch [DD04, KE1, S.50]}). \quad (2.3)$$

Für beliebiges $\tau \in \mathbb{R}$ ergibt sich somit offensichtlich

$$K_\tau(z) = e^{-i\tau} \left[\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1+e^{i\tau}z}{1-e^{i\tau}z} \right) \right)^2 - \frac{1}{4} \right]. \quad (2.4)$$

Die Koebe-Funktionen spielen in der Theorie der schlichten Funktionen eine bedeutsame Rolle, denn mit ihrer Hilfe kann sehr häufig die Nicht-Verschärfbarkeit von Ungleichungen bewiesen werden. Zwei Beispiele mögen dies verdeutlichen:

Beispiel 2.1:

K ist aufgrund der Taylorentwicklung ein offensichtliches Beispiel dafür, dass das Theorem von Bieberbach (die ehemalige Bieberbachsche Vermutung) für keinen einzigen Koeffizienten verschärft werden kann.

Beispiel 2.2:

Im Koebeschen Verzerrungssatz [DD04, KE3, S.47], der für alle $(f, z) \in \mathcal{S} \times \triangle$ besagt

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \\ (ii) \quad & \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \\ (iii) \quad & \frac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}, \end{aligned}$$

hat man den Zusatz:

Gilt für ein $z \in \triangle \setminus \{0\}$ in einer der sechs Ungleichungen das Gleichheitszeichen, so ist f eine Koebe-Funktion.

Für die weiteren Betrachtungen spielen die Bilder der Koebe-Funktionen eine wichtige Rolle. Für die Koebe-Funktion K gilt nach [DD04, KE1, S.50]

Bemerkung 2.2.6:

$K(\triangle) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$, also eine geschlitzte Ebene.

Aufgrund dessen, dass die Multiplikation mit einer Zahl $e^{-i\tau}$ einer Drehung um den Winkel $-\tau \pmod{2\pi}$ entspricht und $\text{Bild}(K) = \text{Bild}(K \circ e^{i\tau} \text{id}_{\triangle})$ gilt, folgt weiterhin

Bemerkung 2.2.7:

$K_{\tau}(\triangle) = \mathbb{C} \setminus \{-\frac{u}{4}e^{-i\tau} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq 1\}$, also ebenfalls eine geschlitzte Ebene (vgl. Abbildung 2.1).

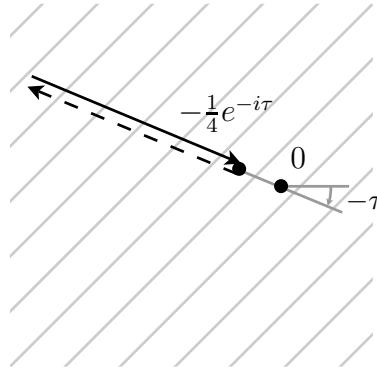


Abbildung 2.1: Bildbereich der Koebe-Funktion K_{τ}

Da Schlitzte wie im Bildbereich von $K_{\tau}(\triangle)$ im Folgenden häufiger auftreten, sollen sie hier kurz formal definiert werden:

Definition 2.2.8:

Sei $a = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$. Dann wird die Halbgerade $H = \{ue^{i\varphi} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq r\}$ radialer Schlitz (von a nach ∞) genannt. Entsprechend wird ein Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus H$ komplexe Ebene mit radialem Schlitz von a nach ∞ genannt.

Die Koebe-Funktionen K_{τ} werden nun durch Multiplikation mit $t > 0$ parametrisiert.

Definition 2.2.9:

Sei $w \in \partial\triangle, t \in \mathbb{R}^+$ und $f_{w,t} : \triangle \rightarrow \mathbb{C}, f_{w,t}(z) := \frac{tz}{(1-wz)^2}$. Die Funktionenfamilie $\mathcal{G} := \{f_{w,t} \mid w \in \partial\triangle, t \in \mathbb{R}^+\}$ heißt Familie der parametrisierten Koebe-Funktionen.

Für jedes $w \in \partial\Delta$ und $t > 0$ lässt sich aus den Taylorentwicklungen (2.2) der K_τ unmittelbar

$$f_{w,t}(z) = \frac{tz}{(1-wz)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} tnw^{n-1}z^n$$

ablesen. Aufgrund der Gleichung (2.4) ist die Gültigkeit von

$$f_{w,t}(z) = \frac{t}{w} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1+wz}{1-wz} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{w} g_t(wz) \quad (2.5)$$

mit $g_t(z) = t \left[\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]$ evident. Mit der Bezeichnung $\Phi_t(z) = tz$ liefert Gleichung (2.3) für g_t die Komposition

$$g_t = \Phi_t \circ L_{-\frac{1}{4}} \circ q \circ Q,$$

die in Abbildung (2.2) veranschaulicht wird. Mit Bemerkung 2.2.7 ergibt sich somit für den Bildbereich

$$g_t(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{u}{4} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq t \right\} \quad (2.6)$$

wiederum eine geschlitzte Ebene.

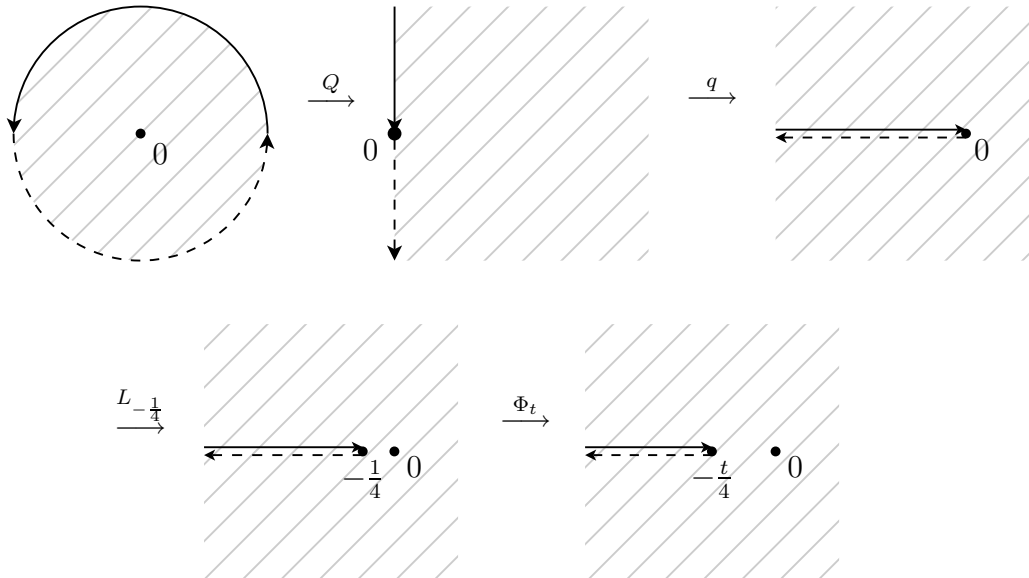


Abbildung 2.2: Komposition der parametrisierten Koebe-Funktion

Eine wichtige Untermenge der normalisierten Riemannschen Abbildungsfunktionen stellen im Zusammenhang mit den Löwner-Familien diejenigen Funktionen dar, deren Bildbereich eine Teilmenge von Δ ist (siehe Abbildung 2.3).

Definition 2.2.10:

$\mathcal{B} := \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid f(0) = 0 \text{ und } f(\Delta) \subseteq \Delta\}$ heißt Familie der Schwarz-Funktionen.

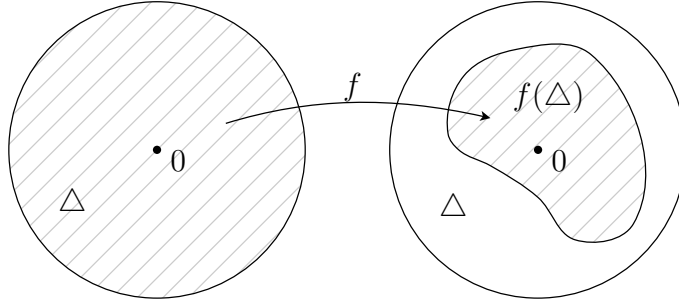


Abbildung 2.3: Bildbereich einer Funktion aus \mathcal{B}

Lemma 2.2.11:

\mathcal{B} ist kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Beweis. Wegen $f(\Delta) \subseteq \Delta$ ($\forall f \in \mathcal{B}$) ist \mathcal{B} trivialerweise sogar global beschränkt und daher nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) normal. Nach der Kompaktheitsversion des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) verbleibt noch die Abgeschlossenheit von \mathcal{B} zu zeigen. Sei hierzu (f_n) eine kompakt-konvergente Folge mit dem Grenzwert f . Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt auf ganz Δ nach dem Lemma von Schwarz $|f_n(z)| \leq |z|$ und somit aus Stetigkeitsgründen auch $|f(z)| \leq |z|$ auf ganz Δ . Folglich hat man $f(\Delta) \subseteq \Delta$ und wegen $f_n(0) = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) auch $f(0) = 0$, d.h., $f \in \mathcal{B}$. \square

Im Kontext der vorliegenden Arbeit ist jedoch die Einschränkung auf Funktionen aus \mathcal{R} wesentlich. Daher wird für diese Funktionenfamilie in der folgenden Definition eine eigene Bezeichnung eingeführt:

Definition 2.2.12:

$\mathcal{B}_{\mathcal{R}} := \{f \in \mathcal{O}(\Delta) \mid f \in \mathcal{B} \text{ und } f \in \mathcal{R}\} = \mathcal{B} \cap \mathcal{R}$.

Lemma 2.2.13:

$\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ist normal, aber nicht kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Beweis. Wegen $f(\Delta) \subseteq \Delta$ ($\forall f \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$) ist $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ trivialerweise sogar global beschränkt und daher nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) normal. Anhand der Familie $\{\frac{z}{n} \mid z \in \Delta \text{ und } n \in \mathbb{N}\}$ sieht man sofort ein, dass $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ nicht abgeschlossen ist und also nach der Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) nicht kompakt sein kann. \square

Der folgende Satz arbeitet eine erste charakterisierende Eigenschaft der Löwner-Familien anhand der Familien der parametrisierten Koebe-Funktionen heraus.

Satz 2.2.14:

Sei $w \in \partial\Delta$ fest gewählt und sei $G_{w,t} := \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq t \right\}$ für jedes $t > 0$, also ist $G_{w,t}$ das Gebiet, das aus der komplexen Ebene \mathbb{C} mit einem radialen Schlitz von $-\frac{t}{4w}$ nach ∞ besteht. (Man hat $g_t(\Delta) = G_{1,t}$.) Definiert man auf der Familie \mathcal{E} aller einfach-zusammenhängenden Gebiete $G \subset \mathbb{C}$ mit $0 \in G$ und $G \neq \mathbb{C}$ eine Halbordnung durch die Mengeninklusion \subset , so bildet die Familie $\{G_{w,t}\}_{t>0}$ eine maximale, linear geordnete Familie.

Maximal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass es keine linear geordnete Familie aus \mathcal{E} gibt, die $\{G_{w,t}\}_{t>0}$ echt enthält.

Beweis. Da für $s, t \in \mathbb{R}^+$ entweder

$$\left\{ -\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq s \right\} \subseteq \left\{ -\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq t \right\}$$

oder umgekehrt gilt, trifft dies auch noch für die Komplemente $G_{w,t}$ und $G_{w,s}$ zu. Die Familie $\{G_{w,t}\}_{t>0}$ ist also eine linear geordnete Familie in \mathcal{E} .

Annahme: $\{G_{w,t}\}_{t>0}$ ist nicht maximal. Dann gibt es eine linear geordnete Familie $\mathcal{H} \subset \mathcal{E}$, die $\{G_{w,t}\}_{t>0}$ echt enthält. Da \mathcal{H} linear geordnet ist, gibt es dann auch zu jedem $t > 0$ ein $H \in \mathcal{H}$ mit

$$H \subseteq G_{w,t} \quad \text{oder} \quad G_{w,t} \subseteq H. \quad (2.7)$$

Es wird gezeigt, dass dann bereits gilt

$$H = G_{w,s} \quad \text{für ein } s > 0. \quad (2.8)$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass es kein $\mathcal{H} \subsetneq \mathcal{E}$ mit $\{G_{w,t}\}_{t>0} \subsetneq \mathcal{H} \subset \mathcal{E}$ geben kann, da ansonsten $G_{w,r} \subsetneq H$ mit einem $H \in \mathcal{H}$ für mindestens ein $r > 0$ gelten würde. Dies widerspräche jedoch Gleichung (2.8). Es genügt also (2.8) zu beweisen.

Sei also $H \in \mathcal{H}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet mit $0 \in H$ und $H \neq \mathbb{C}$. Wegen der Offenheit von H existiert ein $t > 0$ mit $\Delta_t(0) \subset H$. Dann gilt $H \not\subseteq G_{w,t}$, da $|\frac{t}{4w}| = \frac{t}{4} < t$. Wegen (2.7) gilt somit $G_{w,t} \subseteq H$.

Man hat $H = G_{w,t} \cup S$, wobei S eine Teilmenge des Halbstrahls

$$L_{w,t} := \left\{ -\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq t \right\}$$

ist (da dieser Halbstrahl die einzigen Elemente aus \mathbb{C} enthält, die nicht in $G_{w,t}$ enthalten sind).

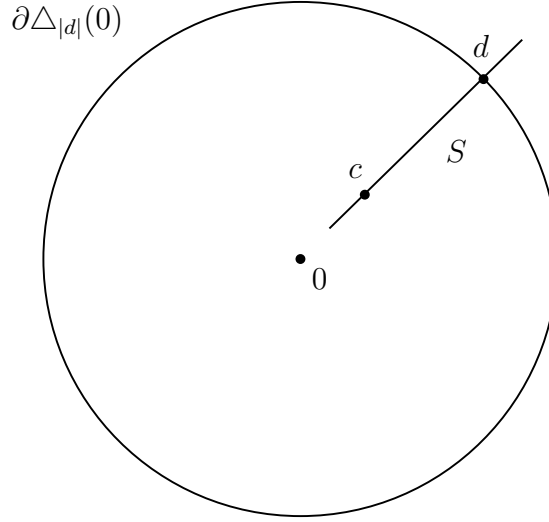


Abbildung 2.4: Konstruktion von S im Beweis zu Satz 2.2.14

Wegen $H \neq \mathbb{C}$ gilt $S \subsetneq L_{w,t}$. Man erhält daher $S = \{-\frac{u}{4w} \mid t \leq u < s\}$ für ein $s > t$, denn ansonsten gäbe es ein $c \in L_{w,t}$ mit $c \notin H$, aber auch einen Punkt d auf $L_{w,t}$ mit $|d| > |c|$ und $d \in H$ (siehe Abbildung 2.4). Wegen $G_{w,t} \subseteq H$ und $c \neq 0, d \in H$ läge dann die Kreislinie $\partial\Delta_{|d|}(0)$ in H . Die Funktion $\frac{1}{z-c}$ wäre wegen $c \notin H$ wohldefiniert auf H , aber es würde dann

$$\int_{\partial\Delta_{|d|}(0)} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i$$

im Widerspruch zum einfachen Zusammenhang von H [DR72, S.56, Folgerung] gelten. Also ist $S = \{-\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } t \leq u < s\}$ für ein $s > t$ und folglich $L_{w,t} \cup S = L_{w,s}$, d.h., $H = G_{w,t} \cup S = G_{w,s}$, womit der Satz bewiesen ist. \square

Eine zweite charakterisierende Eigenschaft der Löwner-Familien ist die Löwner-sche Differentialgleichung. Dies soll nachfolgend anhand der parametrisierten Koebe-Funktionen $f_{w,t}(z)$ exemplarisch demonstriert werden.

Lemma 2.2.15:

Für ein festes $w \in \partial\Delta$ sei $f(t, z) := f_{w,t}(z)$ und $\varphi(t, z) := \varphi_w(z) = \frac{1-wz}{1+wz}$.² Die parametrisierten Koebe-Funktionen $f_{w,t}(z)$ genügen dann der Löwnerschen Diffe-

²In der Löwnerschen Differentialgleichung (2.9) ist die Funktion φ im Allgemeinen nicht nur von z , sondern auch von t abhängig, auch wenn dies im vorliegenden Beispiel nicht der Fall ist.

rentialgleichung

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(t, z) = \varphi(t, z) \cdot z \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(t, z). \quad (2.9)$$

Dabei besitzen die Funktionen $\varphi(t, z)$ die charakteristische Eigenschaft

$$\operatorname{Re} \varphi(t, z) \geq 0 \quad (\forall (t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \Delta) \quad \text{sowie} \quad \varphi(t, 0) = 1.$$

Beweis. Partielle Differentiation von $f(t, z) = f_{w,t}(z)$ nach t ergibt

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(t, z) = \frac{tz}{(1 - wz)^2} \quad (= f(t, z)),$$

während partielle Differentiation von $f(t, z)$ nach z

$$\begin{aligned} z \frac{\partial}{\partial z} f(t, z) &= z \left[\frac{t}{(1 - wz)^2} - \frac{tz(1 - wz)(-2w)}{(1 - wz)^4} \right] = \frac{tz}{(1 - wz)^2} \left(1 + \frac{2wz}{1 - wz} \right) \\ &= \frac{tz}{(1 - wz)^2} \cdot \frac{1 - wz + 2wz}{1 - wz} = \frac{tz}{(1 - wz)^2} \cdot \frac{1 + wz}{1 - wz} \end{aligned}$$

ergibt. Daraus folgt unmittelbar (2.9). Weiter gilt für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\varphi(t, z)) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - wz}{1 + wz} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - wz)\overline{(1 + wz)}}{|1 + wz|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - wz)(1 + \overline{wz})}{|1 + wz|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 - wz + \overline{wz} - |z|^2}{|1 + wz|^2} \right) \quad \text{wegen } |w| = 1 \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1 + 2i\operatorname{Im}(\overline{wz}) - |z|^2}{|1 + wz|^2} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|1 + wz|^2} \geq 0 \quad \text{wegen } z \in \Delta \end{aligned}$$

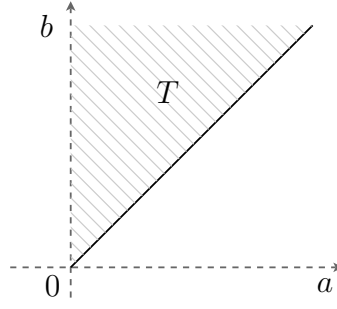
sowie $\varphi(t, 0) = 1$. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts wird noch eine dritte charakterisierende Eigenschaft von Löwner-Familien angegeben.

Lemma 2.2.16:

Sei T die Indexmenge $\{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < a \leq b < \infty\}$ (vgl. Abbildung 2.5). Zur Familie \mathcal{G} der parametrisierten Koebe-Funktionen $\{f_{w,t}(z)\}_{t>0}$ gibt es genau eine Funktionenfamilie

$$\mathfrak{B}_T := \{B(b, a) \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \mid f_w(a, z) = f_w(b, B(b, a)(z)) \quad \forall f_w(a, z) \in \mathcal{G}, (a, b) \in T\}.$$


 Abbildung 2.5: Veranschaulichung der Indexmenge T

Beweis. Für alle $B(b, a) \in \mathfrak{B}_T$ gilt

$$f_{w,a}(z) = (f_{w,b} \circ B(b, a))(z) \quad (\forall z \in \Delta).$$

Da $f_{w,b} \in \mathcal{R}$ schlicht ist, folgt daraus

$$f_{w,b}^{-1} \circ f_{w,a} = B(b, a).$$

Hieraus ergeben sich unmittelbar Existenz und Eindeutigkeit.³

□

Es wird nun ausgeführt, dass die Bilder $B(b, a)(\Delta)$ geschlitzte Kreise sind, wobei die Struktur des geschlitzten Kreises exakt bestimmt wird.

Mit der Schreibweise $B_{b,a}(z) = B(b, a)(z)$ gilt

$$B_{b,a} = f_{w,b}^{-1} \circ f_{w,a}. \quad (2.10)$$

Aus Gleichung (2.5) ergibt sich

$$f_{w,a} = \varphi_{a6} \circ \varphi_{a5} \circ \varphi_{a4} \circ \varphi_{a3} \circ \varphi_{a2} \circ \varphi_{a1},$$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi_{a1}(z) &= wz, & \varphi_{a2}(z) &= \frac{1}{2} \frac{1+z}{1-z}, & \varphi_{a3}(z) &= z^2, \\ \varphi_{a4}(z) &= z - \frac{1}{4}, & \varphi_{a5}(z) &= az, & \varphi_{a6}(z) &= \frac{1}{w}z. \end{aligned}$$

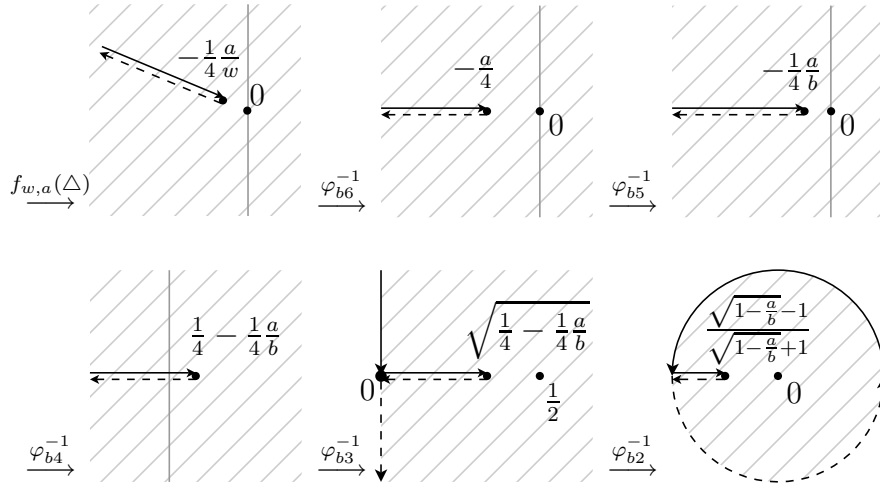
Entsprechend ergibt sich

$$f_{w,b}^{-1} = \varphi_{b1}^{-1} \circ \varphi_{b2}^{-1} \circ \varphi_{b3}^{-1} \circ \varphi_{b4}^{-1} \circ \varphi_{b5}^{-1} \circ \varphi_{b6}^{-1},$$

³Ist also \mathfrak{C}_T eine weitere Familie mit genau den gleichen Eigenschaften wie \mathfrak{B}_T , d.h.,

$$\mathfrak{C}_T = \{C(b, a) \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \mid f_w(a, z) = f_w(b, C(b, a)(z)) \quad \forall f_w(a, z) \in \mathcal{G}, (a, b) \in T\},$$

so gilt $\mathfrak{C}_T = \mathfrak{B}_T$.


 Abbildung 2.6: Konstruktion von $B_{b,a}$

wobei

$$\begin{aligned} \varphi_{b6}^{-1}(z) &= wz, & \varphi_{b5}^{-1}(z) &= \frac{1}{b}z, & \varphi_{b4}^{-1}(z) &= z + \frac{1}{4}, \\ \varphi_{b3}^{-1}(z) &= \sqrt{z}, & \varphi_{b2}^{-1}(z) &= \frac{z - \frac{1}{2}}{z + \frac{1}{2}}, & \varphi_{b1}^{-1}(z) &= \frac{1}{w}z. \end{aligned}$$

Die Komposition (2.10) wird in Abbildung 2.6 veranschaulicht: das erste Gebiet ist das Bild von Δ unter $f_{w,a}$. Die folgenden Gebiete zeigen die ersten fünf der sechs Faktoren von $f_{w,b}^{-1}$. Die Anwendung des letzten Faktors, also $\varphi_{b1}^{-1} : z \rightarrow \frac{z}{w}$, bildet den letzten geschlitzten Kreis in Abbildung 2.6 auf das Endergebnis ab, das in Abbildung 2.7 dargestellt wird. Insgesamt bildet also $B(b, a, z)$ den Einheitskreis Δ auf den geschlitzten Einheitskreis Δ mit radialem Schlitz vom Punkt

$$\frac{1}{w} \frac{\sqrt{1 - \frac{a}{b}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}} + 1}$$

zum Rand des Einheitskreises ab.

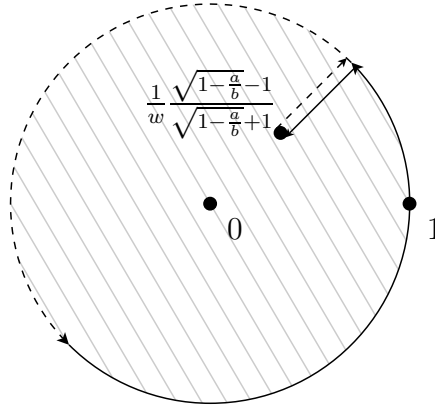
Nachfolgend werden die drei charakterisierenden Eigenschaften anhand eines *einfachen* Beispiels einer Löwner-Familie⁴ gezeigt.

Beispiel 2.3:

Es sei $f(t, z) := \Phi_t(z) = tz$ für alle $(t, z) \in \mathbb{R}^+ \times \Delta$. Für alle $t \in \mathbb{R}^+$ liegen die Funktionen $f(t, z)$ in \mathcal{R} und ihre Bilder sind gleich $\Delta_t(0)$.

$\mathcal{C} := \{G \subset \mathbb{C} \mid 0 \in G, G \neq \mathbb{C}, G \text{ einfach-zusammenhängend}\}$ sei halbgeordnet durch \subseteq . Die Menge $\{\Delta_t(0)\}_{t>0}$ ist offensichtlich linear geordnet.

⁴Es handelt sich hier um die einfachste Löwner-Familie schlechthin, während ansonsten in der übrigen Arbeit alle Betrachtungen anhand der Familie der parametrisierten Koebe-Familien durchgeführt werden.


 Abbildung 2.7: Bild von $B_{b,a}(\Delta)$

Gäbe es eine weitere linear geordnete Teilmenge \mathcal{E} in \mathcal{C} mit $\{\Delta_t(0)\}_{t>0} \subsetneq \mathcal{E}$, so würde für $H \in \mathcal{E}$ wegen $H \neq \mathbb{C}$ zunächst gelten: Es gibt ein $c \in \mathbb{C}$ mit $c \notin H$, aber $c \in \Delta_{2|c|}(0)$. Aus der Annahme und der linearen Ordnung von \mathcal{E} folgt also $H \subseteq \Delta_{2|c|}(0)$. Jedes H aus \mathcal{E} liegt also in einem Kreis $\Delta_t(0)$. Somit kann nicht $\{\Delta_t(0)\}_{t>0} \subsetneq \mathcal{E}$ gelten, d.h., die Menge $\{\Delta_t(0)\}_{t>0}$ ist maximal.

Wegen

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(t, z) = z \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(t, z)$$

gilt in der Löwnerschen Differentialgleichung $\varphi(t, z) = 1$ und somit

$$\operatorname{Re}(\varphi(t, z)) \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(t, 0) = 1.$$

Setzt man nun noch

$$B(b, a)(z) = \frac{a}{b} \cdot z \quad \text{für} \quad 0 < a \leq b < \infty,$$

so hat man $B(b, a) \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, da $|\frac{a}{b}| \leq 1$ und somit $B(b, a)(\Delta) \subseteq \Delta$ sowie weiter

$$f(b, B(b, a)(z)) = b \cdot \frac{a}{b} \cdot z = a \cdot z = f(a, z).$$

Die angeführten Beispiele weisen den Weg zur Löwner-Theorie. Im nächsten Abschnitt werden Löwner-Familien als linear-geordnete Teilmengen von \mathcal{R} definiert, die maximal in dem Sinne sind, dass sie in keiner anderen linear-geordneten Teilmenge von \mathcal{R} echt enthalten sind. Dabei wird mittels des Begriffs der *Unterordnung* die Halbordnung \subset auf den Bildbereichen der Funktionen auf die Funktionen selbst übertragen.

2.3 Unterordnung und Definition der Löwner-Familien

Im Folgenden wird der Begriff der *Unterordnung*, der für die Definition der allgemeinen *Löwner-Familien* bedeutsam ist, formal eingeführt.

Definition 2.3.1:

Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Delta)$. f heißt g genau dann untergeordnet (in Zeichen: $f \prec g$), wenn $f = g \circ B$ für ein $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$.

Lemma 2.3.2:

Seien $f, g \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$f \prec g \quad \Leftrightarrow \quad f(\Delta) \subseteq g(\Delta).$$

In diesem Fall gilt zusätzlich

$$f'(0) \leq g'(0) \quad \text{mit} \quad g'(0) = f'(0) \Leftrightarrow f = g.$$

Beweis. Gilt $f = g \circ B$ für ein $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, so gilt nach Definition 2.2.12 von $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$

$$f(\Delta) = g(B(\Delta)) \subseteq g(\Delta).$$

Ist umgekehrt $f(\Delta) \subseteq g(\Delta)$ erfüllt, dann gilt

$$g^{-1}(f(\Delta)) \subseteq g^{-1}(g(\Delta)) \subseteq \Delta.$$

Daraus folgt $B = g^{-1} \circ f$ und somit $f = g \circ B$. Nach dem Lemma von Schwarz gilt $B'(0) \leq 1$ und damit dann

$$f'(0) = g'(B(0))B'(0) = g'(0)B'(0) \leq g'(0). \quad (2.11)$$

Gleichheit in (2.11) impliziert unmittelbar $B'(0) = 1$. Weiterhin gilt $B(0) = 0$. Daraus folgt mittels des Schwarzschen Lemmas $B = \text{id}_{\Delta}$. Gilt umgekehrt $f = g$, so ist die Gleichheit in (2.11) trivial. \square

Lemma 2.3.3:

Die Unterordnung \prec definiert eine Halbordnung auf \mathcal{R} , d.h., für $f, g, h \in \mathcal{R}$ gilt

- | | | |
|-------|--|------------------|
| (i) | $f \prec f$ | (Reflexivität), |
| (ii) | $f \prec g, g \prec f \Rightarrow f = g$ | (Antisymmetrie), |
| (iii) | $f \prec g, g \prec h \Rightarrow f \prec h$ | (Transitivität). |

Beweis. Zu zeigen sind die drei Eigenschaften:

- (i) Die Reflexivität von \prec ist wegen $f = f \circ \text{id}_\Delta$ gegeben.
- (ii) Aus $f = g \circ B_1$ für ein $B_1 \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ und $g = f \circ B_2$ für ein $B_2 \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ ergibt sich $g = g \circ B_1 \circ B_2$, d.h., $B_1 \circ B_2 = \text{id}_\Delta$, da g injektiv ist. Desweiteren gilt $(B_1 \circ B_2)'(0) = 1$, d.h. $B_1'(B_2(0)) \cdot B_2'(0) = 1$, also $B_1'(0) \cdot B_2'(0) = 1$. Daraus folgt wegen $B_1'(0) > 0$ und $B_2'(0) > 0$ mit dem Schwarzschen Lemma, dass B_1 und B_2 Drehungen mit $B_1'(0) = B_2'(0) = 1$ sind. Also gilt $B_1 = B_2 = \text{id}_\Delta$ und damit auch $f = g$. Somit ist die Antisymmetrie von \prec gezeigt.
- (iii) Die Transitivität von \prec ist ebenfalls gegeben, denn für $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ folgt aus $f = g \circ B_1$ und $g = h \circ B_2$ unmittelbar $f = h \circ B_2 \circ B_1$. Wegen

$$B_2(B_1(0)) = B_2(0) = 0 \quad \text{und} \quad B_2(B_1(\Delta)) \subseteq B_2(\Delta) \subseteq \Delta$$

ist $B_2 \circ B_1$ wieder eine Funktion aus $\mathcal{B}_\mathcal{R}$.

Insgesamt ist \prec somit eine Halbordnung. □

Definition 2.3.4:

Eine Kette in \mathcal{R} ist eine nicht-leere linear geordnete Teilmenge \mathcal{C} von \mathcal{R} . Dabei ist \mathcal{R} mit der Halbordnung \prec versehen.

Eine Kette \mathcal{L} in \mathcal{R} heißt Löwner-Familie, wenn sie maximal bzgl. \prec ist, d.h., wenn eine der beiden folgenden äquivalenten Aussagen gilt:

- (i) Es gibt keine Kette \mathcal{C} in \mathcal{R} mit $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{C} \subsetneq \mathcal{R}$.
- (ii) Aus $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{C}$ für eine Kette \mathcal{C} aus \mathcal{R} folgt $\mathcal{L} = \mathcal{C}$.

Lemma 2.3.5:

Es gibt keine Kette \mathcal{C} mit $\mathcal{C} = \mathcal{R}$.

Beweis. Sei $f(z) = z + \frac{1}{2}z^2$. Dann ist $f'(z) = 1 + z$. Desweiteren gilt $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1 > 0$. Für $z, w \in \Delta$ mit $z \neq w$ gilt

$$\begin{aligned} f(z) = f(w) &\Leftrightarrow z + \frac{1}{2}z^2 = w + \frac{1}{2}w^2 \\ &\Leftrightarrow (z - w) + \frac{1}{2}(z^2 - w^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (z - w) + \frac{1}{2}(z - w)(z + w) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}(z + w) = 0 && \text{wegen } z \neq w \\ &\Leftrightarrow 2 = -z - w \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 = |-z - w| \leq |z| + |w| < 1 + 1 = 2 \quad \text{Widerspruch!}$$

Daher ist f schlicht. Insgesamt gilt also $f \in \mathcal{R}$.

Sei weiterhin $g(z) = z + \frac{1}{3}z^3$. Dann ist $g'(z) = 1 + z^2$. Desweiteren gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1 > 0$. Für $z, w \in \Delta$ mit $z \neq w$ gilt

$$\begin{aligned}
 g(z) = g(w) &\Leftrightarrow z + \frac{1}{3}z^3 = w + \frac{1}{3}w^3 \\
 &\Leftrightarrow (z - w) + \frac{1}{3}(z^3 - w^3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (z - w) + \frac{1}{3}(z - w)(z^2 - zw + w^2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{3}(z^2 - zw + w^2) = 0 && \text{wegen } z \neq w \\
 &\Leftrightarrow 3 = -z^2 + zw - w^2 \\
 \Rightarrow \quad 3 = |-z^2 + zw - w^2| &\leq |z^2| + |zw| + |w^2| \\
 &< 1 + 1 + 1 = 3 && \text{Widerspruch!}
 \end{aligned}$$

Daher ist g schlicht. Insgesamt gilt also $g \in \mathcal{R}$.

Es gilt $f'(0) = g'(0) = 1$, aber $f \neq g$. Aufgrund von Lemma 2.3.2 kann somit weder $f \prec g$ noch $g \prec f$ gelten. \square

Satz 2.3.6:

Jedes $f \in \mathcal{R}$ liegt in einer Löwner-Familie \mathcal{L} . Allgemeiner: Jede Kette \mathcal{C} aus \mathcal{R} ist in einer Löwner-Familie \mathcal{L} enthalten.

Beweis. Der erste Teil der Behauptung folgt aus dem zweiten Teil, da die einelementige Menge $\{f\}$ mit $f \in \mathcal{R}$ bereits eine Kette darstellt. Sei also \mathcal{C} eine Kette in \mathcal{R} , und \mathcal{S} die Menge aller Ketten in \mathcal{R} , die \mathcal{C} enthalten. \mathcal{S} sei halbgeordnet durch \subseteq . Jede linear geordnete Teilmenge von \mathcal{S} (bzgl. \subseteq) besitzt eine obere Schranke, nämlich ihre Vereinigung. Nach dem Lemma von Zorn enthält dann \mathcal{S} ein maximales Element. Jedes maximale Element ist aber definitionsgemäß eine Löwner-Familie \mathcal{L} , die \mathcal{C} enthält. \square

Korollar 2.3.7:

Für ein festes $w \in \partial\Delta$ sei \mathcal{L}_w die Familie der parametrisierten Koebe-Funktionen $f_{w,t}(z) = \frac{tz}{(1-wz)^2}$, also

$$\mathcal{L}_w := \{f_{w,t} \mid 0 < t < \infty\}.$$

Dann ist \mathcal{L}_w eine Löwner-Familie.

Beweis. Diese Aussage folgt unmittelbar aus Satz 2.2.14, denn die dort auf den Bildbereichen gegebene Halbordnung \subseteq überträgt sich aufgrund der Äquivalenzaussage in Lemma 2.3.2 mittels Unterordnung auf die Funktionen selbst. \square

2.4 Der Dirichlet-Raum und das Flächentheorem

Definition 2.4.1:

Sei $H(\Delta)$ der Hilbert-Raum aus Satz A.2.2. Dann wird

$$\mathcal{D} := \left\{ f \in H(\Delta) \mid f(0) = 0 \text{ und } \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 dx dy < \infty \right\}$$

als Dirichlet-Raum bezeichnet.

Satz 2.4.2:

Für $f, g \in \mathcal{D}$ wird durch

$$\|f\|_{\mathcal{D}} := \sqrt{\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 dx dy}$$

eine Norm auf \mathcal{D} sowie durch

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} := \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} f'(z) \overline{g'(z)} dx dy$$

ein Innenprodukt auf \mathcal{D} definiert, das $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ zu einem Hilbert-Raum macht.

Die Integrale $\frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 dx dy$ heißen Dirichlet-Integrale.

Beweis. Es bezeichne $\| \cdot \|$ die Norm auf $H(\Delta)$, also

$$\|f\|^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f(z)|^2 dx dy.$$

\mathcal{D} ist vermöge der von $H(\Delta)$ geerbten Norm, die ebenfalls mit $\| \cdot \|$ bezeichnet werde, ein normierter Raum. Das von $H(\Delta)$ geerbte Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ werde ebenfalls mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet. (Dass \mathcal{D} ein Untervektorraum von $H(\Delta)$ ist, ist trivial.)

Es sei $\mathcal{O}(\Delta)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Dann ist nach Lemma A.2.3 die Injektion $H(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta)$, $f \mapsto f$ stetig. Weiter ist das Funktional $L : \mathcal{O}(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}$, $f \mapsto f(0)$ stetig, denn wenn (f_n) bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gegen $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert, so konvergiert (nach Satz A.1.5) (f_n) kompakt gegen f , also erst recht punktweise. D.h.,

$$(f_n(z)) \rightarrow f(z) \quad (\forall z \in \Delta).$$

Es gilt also

$$L(f_n) = f_n(0) \rightarrow f(0) = L(f),$$

d.h., L ist stetig. Somit ist auch

$$\widehat{L} : H(\Delta) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(0)$$

als Komposition stetiger Funktionen stetig. Es gilt $\mathcal{D} = \widehat{L}^{-1}\{0\}$, da $f(0) = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}$ gilt. Da $\{0\}$ abgeschlossen in \mathbb{C} ist, ist somit $\mathcal{D} = \widehat{L}^{-1}\{0\}$ abgeschlossen in $(H(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Ist nun (f_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und somit auch in $(H(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle)$, dann gibt es wegen der Vollständigkeit des Hilbert-Raums $H(\Delta)$ ein $f \in H(\Delta)$ mit $(f_n) \rightarrow f$. Wegen der Abgeschlossenheit von $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ in $(H(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ liegt dann aber auch f in \mathcal{D} und daher ist $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein vollständiger Unterraum des Hilbert-Raums $(H(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und mithin nach Satz A.2.4 selbst ein Hilbert-Raum. Es wird nun durch $\|f\|_{\mathcal{D}} := \|f'\|$ eine weitere Norm auf \mathcal{D} definiert. $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ ist tatsächlich eine Norm, denn aus

$$\|f\|_{\mathcal{D}}^2 = 0, \quad \text{d.h.} \quad \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |f'(z)|^2 dx dy = 0,$$

folgt wegen der Holomorphie von f und dem Identitätssatz sofort $f' = 0$ und hieraus wegen $f(0) = 0$ für alle $f \in \mathcal{D}$ sofort $f = 0$. (Der Taylorkoeffizient a_0 von f muss ja gleich 0 sein.) Die übrigen Norm-Axiome gelten natürlich, weil sie bereits für $\|\cdot\|$ gelten.

Für $f, g \in \mathcal{D}$ definiert $\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}} := \langle f', g' \rangle$ entsprechend ein Innenprodukt auf \mathcal{D} . Der Satz ist also nach Satz A.2.2 bewiesen, wenn noch gezeigt wird, dass $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ ein vollständiger Unterraum des Hilbert-Raums $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

Sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \|f'_n - f'_m\| < \varepsilon.$$

Da $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbert-Raum ist, gibt es ein $f \in \mathcal{D}$ mit $f'_n \rightarrow f'$ in $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Sei F die Stammfunktion von f' mit $F \in \mathcal{D}$. (Die Existenz ist klar wegen des einfachen Zusammenhangs von Δ (siehe auch [DR72, S.40, Satz 26]) und die Eindeutigkeit folgt, da der Koeffizient a_0 in der Taylorentwicklung aller $f \in \mathcal{D}$ gleich 0 ist.) Es gilt dann offensichtlich $f_n \rightarrow F$ in $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$.

Der Dirichlet-Raum $(\mathcal{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}})$ ist also ein Hilbert-Raum. \square

Bemerkung 2.4.3:

Die Familien $H(\Delta)$ und \mathcal{D} sind nicht normal, wie man sofort anhand der Familie $\{n \cdot \text{id}_\Delta \mid n \in \mathbb{N}\}$ verifiziert.

Das Innenprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ auf \mathcal{D} lässt sich durch eine unendliche Reihe ausdrücken:

Satz 2.4.4:

Für $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ aus $\mathcal{O}(\Delta)$ gilt

$$f \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_{\mathcal{D}}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2.$$

Beweis. Es gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$. Sei $R \in \mathbb{R}$ mit $0 < R < 1$. Der Transformationssatz für Lebesgue-Integrale bzgl. ebener Polarkoordinaten liefert dann mit $z = r e^{i\varphi}$ ($(r, \varphi) \in [0, R] \times [0, 2\pi[$) und $dx \, dy = r \, dr \, d\varphi$

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{D}}^2 &= \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R(0)} |f'(z)|^2 = \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta_R(0)} f'(z) \overline{f'(z)} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi[} \sum_{m=1}^{\infty} m a_m r^{m-1} e^{i\varphi(m-1)} \cdot \overline{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1} e^{i\varphi(n-1)}} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi[} \sum_{m=1}^{\infty} m a_m r^{m-1} e^{i\varphi(m-1)} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \overline{a_n} r^{n-1} e^{-i\varphi(n-1)} \, r \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n a_m \overline{a_n} \iint_{[0, R] \times [0, 2\pi[} r^{m+n-1} e^{i\varphi(m-n)} \, dr \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m n a_m \overline{a_n} \int_0^R r^{m+n-1} \, dr \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(m-n)} \, d\varphi \end{aligned}$$

nach dem Satz von Fubini

$$=: I.$$

Wegen

$$\int_0^{2\pi} e^{i\varphi(m-n)} \, d\varphi = \begin{cases} \frac{-i}{m-n} e^{i\varphi(m-n)} \Big|_0^{2\pi} = 0, & \text{für } m \neq n \\ \varphi \Big|_0^{2\pi} = 2\pi, & \text{für } m = n \end{cases} \quad (2.12)$$

folgt weiter

$$I = \frac{2\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n \overline{a_n} \int_0^R r^{2n-1} \, dr = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n|^2 \frac{R^{2n}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2 R^{2n}.$$

$R \rightarrow 1$ liefert die Behauptung. □

Sei $w \in \triangle$ fest. Dann gilt $\overline{w}z \in \triangle$ für alle $z \in \triangle$ und damit hat $\log \frac{1}{1-\overline{w}z}$ bekanntlich die Taylorreihenentwicklung

$$\log \frac{1}{1-\overline{w}z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\overline{w}z)^n}{n} =: h_w.$$

$h_w \in \mathcal{D}$ ist klar, denn für die Taylorkoeffizienten a_n in der Reihendarstellung von h_w gilt $a_n = \frac{\overline{w}^n}{n}$, also $n|a_n|^2 = \frac{|w|^{2n}}{n}$, und damit ist die Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent, da $|w| < 1$.

Die nachstehende Beziehung drückt aus, dass sich der Wert von $f \in \mathcal{D}$ an der Stelle w durch das Innenprodukt von f und h_w auf \mathcal{D} darstellen lässt.

Lemma 2.4.5:

Für jedes $w \in \triangle$ und jedes $f \in \mathcal{D}$ gilt

$$\langle f(z), h_w \rangle_{\mathcal{D}} = \left\langle f(z), \log \frac{1}{1-\overline{w}z} \right\rangle_{\mathcal{D}} = f(w).$$

Beweis. Mit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, d.h. $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, und

$$\overline{\frac{d}{dz} \log \frac{1}{1-\overline{w}z}} = \frac{\overline{w}}{1-\overline{w}z} = \frac{w}{1-w\overline{z}}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \langle f(z), h_w \rangle_{\mathcal{D}} &= \left\langle f(z), \log \frac{1}{1-w\overline{z}} \right\rangle = \frac{1}{\pi} \iint_{\triangle} \sum_{n=1}^{\infty} f'(z) \cdot \overline{\frac{d}{dz} \log \frac{1}{1-\overline{w}z}} dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{\triangle} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \cdot \frac{w}{1-w\overline{z}} dx dy \\ &= \frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \iint_{\triangle} z^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} \overline{z}^{k-1} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{n-1} e^{i\varphi(n-1)} \sum_{k=1}^{\infty} w^{k-1} r^{k-1} e^{-i\varphi(k-1)} r dr d\varphi \end{aligned}$$

mit $z = r e^{i\varphi}$ und dem Transformationssatz

$$= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n a_n w^{k-1} \int_0^R \int_0^{2\pi} r^{n+k-1} e^{i\varphi(n-k)} dr d\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} n a_n w^{k-1} \int_0^R r^{n+k-1} dr \int_0^{2\pi} e^{i\varphi(n-k)} d\varphi \\
 &\quad \text{nach dem Satz von Fubini} \\
 &= \lim_{R \rightarrow 1} \frac{w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n w^{n-1} \cdot \frac{2\pi R^{2n}}{2n} \quad \text{entsprechend Gleichung (2.12)} \\
 &= \lim_{R \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n R^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w^n = f(w) \\
 &\quad \text{wegen der kompakten Konvergenz.}
 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Korollar 2.4.6 (Flächentheorem):

Seien $f \in \mathcal{D}$ und $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$. Dann gilt $f \circ B \in \mathcal{D}$ sowie $\|f \circ B\|_{\mathcal{D}} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}$.

Beweis. Identifiziert man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 , also $\mathbb{C} \ni z = x + iy = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, und fasst B als Funktion $B : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ auf, also

$$B(z) = B(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

mit $z = (x, y) \in \Delta$ und $u, v : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, so ergibt sich wegen $B = u + iv = (u, v)$ für die Jacobi-Determinante für alle $z = x + iy = (x, y) \in \Delta$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} &= u_x(x, y)v_y(x, y) - u_y(x, y)v_x(x, y) \\
 &= u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) = |B'(z)|^2,
 \end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen aufgrund der Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen, $u_x = v_y, u_y = -v_x$, gilt.

Da B als schlichte Funktion eine biholomorphe Abbildung (also erst recht ein \mathcal{C}^∞ -Diffeomorphismus) ist, lassen sich (u, v) als Koordinatentransformation für den Transformationssatz für Lebesgue-Integrale verwenden mit

$$du \, dv = |B'(z)|^2 \, dx \, dy.$$

Wegen $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ gilt $B(\Delta) \subseteq \Delta$.

Der Transformationssatz liefert für beliebige $f \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} \left| \frac{d}{dz}(f \circ B)(z) \right|^2 dx dy &= \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |(f' \circ B)(z)|^2 |B'(z)|^2 dx dy \\ &= \frac{1}{\pi} \iint_{B(\Delta)} |(f'(w))|^2 du dv \quad \text{mit } w = B(z) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \iint_{\Delta} |(f'(w))|^2 du dv, \end{aligned}$$

woraus sofort

$$f \circ B \in \mathcal{D} \quad \text{sowie} \quad \|f \circ B\|_{\mathcal{D}}^2 \leq \|f\|_{\mathcal{D}}^2$$

folgt, d.h.,

$$\|f \circ B\|_{\mathcal{D}} \leq \|f\|_{\mathcal{D}}.$$

□

Die Flächenintegrale über die quadrierten Beträge von Funktionen aus \mathcal{D} verkleinern sich also im Allgemeinen, wenn eine Funktion aus $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ vorgeschaltet wird. Daher rührt der Name *Flächentheorem*.

2.5 Verallgemeinerung des Dirichlet-Raums und des Flächentheorems

Ziel dieses Abschnittes ist es, das Flächentheorem aus Abschnitt 2.4 zu verallgemeinern, da diese Verallgemeinerung im nächsten Abschnitt in den Beweis des Satzes von Pick eingeht, der im Beweis der Bieberbachschen Vermutung für den zweiten Koeffizienten benötigt wird.

Definition 2.5.1:

Für $\varphi \in \mathbb{R}$ sei $\Delta_{\varphi} := \Delta \setminus \{te^{i\varphi} \mid 0 \leq t < 1\}$. Δ_{φ} wird als *radial geschlitzter Kreis* bezeichnet.

Da Δ_{φ} einfach zusammenhängend ist mit $0 \notin \Delta_{\varphi}$, existieren auf Δ_{φ} holomorphe Logarithmen. Jeder dieser Logarithmen wird im Folgenden kurzer Hand mit \log bezeichnet, da es nur auf die Existenz dieser Logarithmen ankommen wird.

Konvention 2.5.2:

Sei $v \in \mathbb{R}$, dann ist (irgend)ein holomorpher Zweig von z^v auf Δ_{φ} gegeben durch

$z^v = e^{v \log z}$. Für Funktionen der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ aus $\mathcal{O}(\Delta)$ wird für die Funktion $f \in \mathcal{O}(\Delta_\varphi)$ mit $f(z) = z^v \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+v}$ geschrieben werden.

Definition 2.5.3:

Die Ausdrücke

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+v}$$

mit beliebigem, aber festem $v \in \mathbb{R}$ werden als verallgemeinerte Potenzreihen bezeichnet. Gemeint ist damit aber immer eine Funktion $f \in \mathcal{O}(\Delta_\varphi)$ mit

$$f(z) = z^v \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{aus } \mathcal{O}(\Delta).$$

Definition 2.5.4:

Die Gesamtheit aller verallgemeinerten Potenzreihen aus Definition 2.5.3, für die zusätzlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |a_n|^2 < \infty$$

gilt, wird als verallgemeinerter Dirichlet-Raum \mathcal{D}_v bezeichnet. Für $v = 0$ erhält man offensichtlich den klassischen Dirichlet-Raum \mathcal{D} (siehe Satz 2.4.4).

Bemerkung 2.5.5:

\mathcal{D}_v ist ein \mathbb{C} -Vektorraum.

Das ergibt sich unter Beachtung von $|a_n + b_n|^2 \leq |a_n|^2 + |b_n|^2$.

Bemerkung 2.5.6:

Für $f, g \in \mathcal{D}_v$ mit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{n+v}$, $g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n+v}$ definiert

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_v} := \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) a_n \overline{b_n}$$

ein Innenprodukt auf \mathcal{D}_v .

Die nachfolgenden Betrachtungen zielen darauf ab, für $f \in \mathcal{D}_v$ und $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ den Nachweis der Beziehung $f \circ B \in \mathcal{D}_v$ zu erbringen.

Division eines $f \in \mathcal{D}_v$ durch z^v ergibt zunächst die auf Δ_φ holomorphe Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, die sich aufgrund des Identitätssatzes natürlich eindeutig holomorph zu der Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ aus $\mathcal{O}(\Delta)$ fortsetzen lässt. Dies wird in folgender Vereinbarung festgehalten:

Konvention 2.5.7:

Für $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{v+n}$ aus \mathcal{D}_v wird unter $\frac{f(z)}{z^v}$ stets die holomorphe Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ aus $\mathcal{O}(\Delta)$ verstanden.

Bekanntlich gilt für $a \cdot b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\log ab = \log a + \log b + 2\pi ki \quad \text{für ein } k \in \{-1, 0, +1\}.$$

Folglich gilt

$$a^v b^v = e^{v \log a} e^{v \log b} = e^{v \log ab - 2k\pi i v} = (ab)^v \cdot \lambda_v \quad (2.13)$$

mit einem $\lambda_v \in \partial\Delta$.

Es sei nun $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ mit $B(z) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j z^j$. Es gilt dann für ein λ_{1_v} mit $|\lambda_{1_v}| = 1$

$$B(z)^v = B_1^v z^v \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} B_1^{-1} B_j z^j \right]^v \cdot \lambda_{1_v}. \quad (2.14)$$

Aus der reellen Analysis ist die Taylorentwicklung

$$(1+x)^v = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} x^n \quad \text{für } x \in (-1, 1)$$

bekannt, wobei die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{v}{n}$ natürlich definiert sind durch

$$\binom{v}{n} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (v-k)}{n!} & n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Fortsetzung der reellen Potenzreihe ins Komplexe liefert mit Gleichung (2.14) unter Beachtung von $B(\Delta) \subset \Delta$

$$B(z)^v = B_1^v z^v \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} \left[\sum_{j=1}^{\infty} B_1^{-1} B_j z^j \right]^n \right] \cdot \lambda_{1_v}. \quad (2.15)$$

Bemerkung 2.5.8:

$\binom{v}{n}$ ist offensichtlich ein Polynom in v vom Grad n .

Sammeln der Potenzen z^j ergibt unter Beachtung von Bemerkung 2.5.8 zunächst

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{v}{n} \left[\sum_{j=1}^{\infty} B_1^{-1} B_j z^j \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(v) z^n,$$

mit eindeutig bestimmten L_n , die als Funktionen von v aufgefasst wegen Bemerkung 2.5.8 natürlich auch Polynome vom Grad n sind. Folglich gilt wegen (2.15)

$$B(z)^v = B_1^v z^v \left[\sum_{n=0}^{\infty} L_n(v) z^n \right] \cdot \lambda_{1_v} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(v) z^{v+n} \quad (2.16)$$

mit $P_n(v) = B_1^v L_n(v) \lambda_{1_v}$. Aufgrund von Bemerkung 2.5.8 sind die Polynome $P_n(v)$ und $\frac{P_n(v)}{B_1^v}$ beide vom Grad n .

Es gilt nun

$$\begin{aligned} f(B(z)) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n B(z)^{v+n} = B(z)^v \sum_{n=1}^{\infty} a_n B(z)^n \\ &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_j(v) z^{v+j} \right) \sum_{n=1}^{\infty} a_n B(z)^n \quad \text{mit (2.16)} \\ &= z^v \left(\sum_{j=0}^{\infty} P_j(v) z^j \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k \right)^n \right). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren und Sammeln nach Potenzen von z ergibt alsdann

$$(f \circ B)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(v)} z^{v+n}, \quad (2.17)$$

mit eindeutig bestimmten $b_n^{(v)}$, womit die sich anschließende Formulierung des verallgemeinerten Flächentheorems überhaupt erst Sinn macht.

Satz 2.5.9 (Verallgemeinertes Flächentheorem):

Seien $v \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{D}_v$ und $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$. Dann gilt

$$f \circ B \in \mathcal{D}_v \quad \text{und} \quad \langle f \circ B, f \circ B \rangle_{\mathcal{D}_v} \leq \langle f, f \rangle_{\mathcal{D}_v}.$$

In Koeffizientenschreibweise lautet also die Behauptung

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |b_n^{(v)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |a_n|^2,$$

falls

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{v+n} \quad \text{und} \quad (f \circ B)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(v)} z^{v+n}.$$

Vor dem eigentlichen Beweis von Satz 2.5.9 sei noch eine komplexe Fassung des Spezialfalles des Satzes von Stokes (Satz A.2.1) vorangestellt:

Lemma 2.5.10:

Sei γ eine einfach-geschlossene Kurve in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit Innerem G . Weiter seien $f, g \in \mathcal{O}(G)$ und f, f', g, g' seien stetig fortsetzbar nach $G \cup \gamma$. Dann gilt

$$\iint_G f(z) \overline{g'(z)} \, dx \, dy = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) \overline{g(z)} \, dz.$$

Beweis. Da $\text{conj} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$ \mathcal{C}^∞ -differenzierbar auf ganz \mathbb{C} ist, lässt sich der Satz von Stokes auf $f \cdot \bar{g}'$ anwenden.

Mit dem partiellen Differentialoperator

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

erhält man mit $r(z) = r(x, y) := f(z) \cdot \overline{g(z)}$ nach Trennung in Real- und Imaginärteil mit der (reellen) Variante des Satzes von Stokes

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial r}{\partial \bar{z}} \, dx \, dy &= \iint_G \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} + i \frac{\partial r}{\partial y} \right) \, dx \, dy = \int_{\gamma} \left(\frac{1}{2} r \, dy - \frac{1}{2} i r \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2i} \int_{\gamma} r \, dx + i r \, dy = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} r (dx + i dy) = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} r \, dz, \end{aligned}$$

also

$$\iint_G \frac{\partial(f\bar{g})(z)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2i} \int_{\gamma} f(z) \overline{g(z)} \, dz.$$

Nach der Produktregel des Wirtinger-Kalküls gilt

$$\frac{\partial(f\bar{g})(z)}{\partial \bar{z}} = f(z) \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \overline{g(z)}}_{= \overline{g'(z)}} + \overline{g(z)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z)}_{=0, \text{ da } f \text{ holomorph}} = f(z) \overline{g'(z)}$$

und folglich

$$\iint_G f(z) \overline{g'(z)} dx dy = \frac{1}{2i} \int_\gamma f(z) \overline{g(z)} dz,$$

womit das Lemma bewiesen ist. \square

Beweis. [von Satz 2.5.9]

Es wurde bereits gezeigt, dass sich $f \circ B$ für jedes $v \in \mathbb{R}$ als verallgemeinerte Potenzreihe darstellen lässt, wobei die Taylorkoeffizienten natürlich von v abhängen (siehe Gleichung (2.17)).

Der Fall $B = \text{id}_\Delta$ ist trivial und wird im Folgenden ausgeschlossen.

Wegen $B(\Delta) \subset \Delta$ ($\forall B \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$), $B(0) = 0$, $B'(0) > 0$ und $B \neq \text{id}_\Delta$ gilt nach dem Schwarzschen Lemma

$$|B(z)| < |z| \quad (\forall z \in \Delta \setminus \{0\}). \quad (2.18)$$

Da z^v in 0 nicht definiert ist (für $v \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$), kann der Beweis von Satz 2.5.9 nur durch eine Grenzwertbetrachtung erbracht werden.

Sei $0 < \rho < 1$ und $\partial\Delta_\rho$ sei kanonisch parametrisiert. Wegen (2.18) liegt die Bildkurve $B(\partial\Delta_\rho)$ ganz im Inneren von $\partial\Delta_\rho$. Sei H_1 das Gebiet, das von $B(\partial\Delta_\rho)$ und $\partial\Delta_\rho$ berandet wird. Wegen $B(0) = 0$ und der Schlichtheit von B liegt 0 nicht in H_1 und damit ist H_1 als zumindest punktiertes Gebiet nicht einfach-zusammenhängend. Durch einen radialen Schlitz kann man jedoch eine für den Zweck des Beweises hinreichende, einfach-zusammenhängende Teilmenge von H_1 konstruieren (siehe Abbildung 2.8).

Da sowohl $B(\partial\Delta_\rho)$ als auch $\partial\Delta_\rho$ kompakt sind, existiert ein $z \in B(\partial\Delta_\rho)$ mit

$$\text{dist}(z, \partial\Delta_\rho) = \min_{w \in B(\partial\Delta_\rho)} \{\text{dist}(w, \partial\Delta_\rho)\} > 0.$$

In Polarkoordinaten sei $z = re^{i\varphi}$. $H_1 \setminus \{te^{i\varphi} \mid 0 \leq t \leq \rho\}$ ist dann offensichtlich einfach-zusammenhängend. Der Teil von $\{te^{i\varphi} \mid 0 \leq t \leq \rho\}$, der in H_1 liegt, also

$$S := \{te^{i\varphi} \mid r \leq t \leq \rho\},$$

ist der eigentliche Schlitz, d.h.,

$$G := H_1 \setminus S.$$

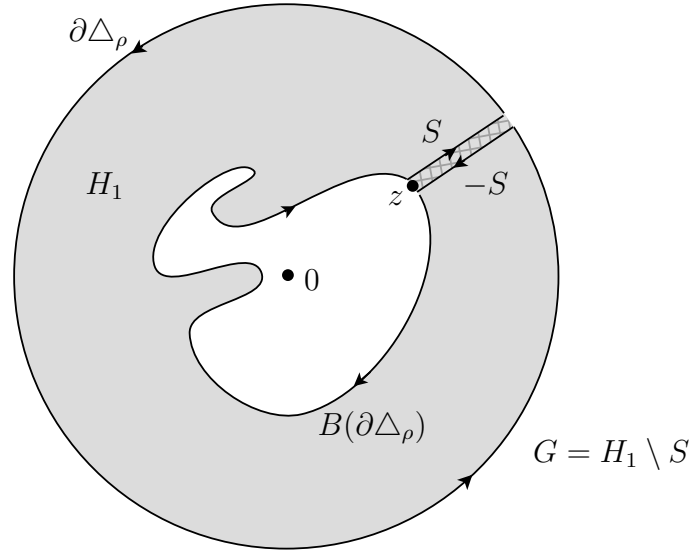


Abbildung 2.8: Konstruktion einer einfach-zusammenhängenden Teilmenge des Kreises Δ_ρ

Da G einfach-zusammenhängend ist, gibt es einen holomorphen Logarithmus auf G und somit auch einen holomorphen Zweig von z^v . Der Rand γ von G lässt sich offensichtlich als

$$\gamma = S + \partial\Delta_\rho - S - B(\partial\Delta_\rho) \quad (2.19)$$

darstellen (siehe Abbildung 2.8).

Mittels der komplexen Fassung des Satzes von Stokes (Lemma 2.5.10) erhält man nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\pi} \iint_G |f'(z)|^2 \, dx \, dy = \frac{1}{\pi} \iint_G f'(z) \overline{f'(z)} \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2i} \int_\gamma f'(z) \overline{f(z)} \, dz && \text{nach Satz von Stokes} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} f'(z) \overline{f(z)} \, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-S} f'(z) \overline{f(z)} \, dz \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{B(\partial\Delta_\rho)} f'(z) \overline{f(z)} \, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_S f'(z) \overline{f(z)} \, dz && \text{gemäß (2.19).} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Wegen der Mehrdeutigkeit von z^v ist per se nicht klar, dass nach Durchlaufen der Kurve die Integrale über S und $-S$ sich gegenseitig aufheben. Dass dies dennoch gilt, zeigen die nachstehenden Betrachtungen, wobei conj die komplexe Konjugationsfunktion $z \mapsto \bar{z}$ bezeichne.

Es gilt

$$f'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (v+m) a_m z^{v+m-1}$$

und folglich auch

$$\begin{aligned} f'(z) \overline{f(z)} &= \sum_{m=1}^{\infty} (v+m) a_m z^{v+m-1} \cdot \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{v+n}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (v+m) a_m z^{v+m-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n z^{v+n}} \quad \text{da conj stetig} \\ &= z^v \bar{z}^v \sum_{m=1}^{\infty} (v+m) a_m z^{m-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n. \end{aligned}$$

Da der Schlitz S gegeben ist durch $\{te^{i\varphi} \mid r \leq t \leq \rho\}$, gilt auf S also für alle $t \in [r, \rho]$

$$z^v = t^v e^{i\varphi v}.$$

Wegen $z^v = e^{v \log z}$ und da $\log z$ nach analytischer Fortsetzung längs einer Kreislinie gegen den Uhrzeigersinn bekanntlich einen Sprung um $2\pi i$ macht, gilt auf $-S$ die Beziehung

$$z^v = t^v e^{i(\varphi+2\pi)v}.$$

Auf S gilt folglich

$$z^v \bar{z}^v = t^{2v} e^{i\varphi v} e^{\overline{i\varphi v}} = t^{2v} |e^{i\varphi v}|^2 = t^{2v} \quad (\forall t \in [r, \rho]) \quad (2.21)$$

und auf $-S$

$$z^v \bar{z}^v = t^{2v} e^{i(\varphi+2\pi)v} e^{\overline{i(\varphi+2\pi)v}} = t^{2v} |e^{i(\varphi+2\pi)v}|^2 = t^{2v} \quad (\forall t \in [r, \rho]). \quad (2.22)$$

Damit nimmt $z^v \bar{z}^v$ auf S und $-S$ also den gleichen Wert t^{2v} an. Da für $m, n \in \mathbb{N}$ z^{m-1} und \bar{z}^n auf S und $-S$ ohnehin den gleichen Wert annehmen, nimmt somit

$$f'(z) \overline{f(z)} = z^v \bar{z}^v \sum_{m=1}^{\infty} (v+m) a_m z^{m-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n \bar{z}^n$$

auf S und $-S$ den gleichen Wert an. Damit ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S f'(z) \overline{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{-S} f'(z) \overline{f(z)} dz = 0 \quad (2.23)$$

gezeigt.

$\partial\Delta_\rho$ sei parametrisiert via $\theta \mapsto e^{i\rho\theta}$. Damit erhält man weiter (unter Beachtung der Tatsache, dass der nicht zu $\partial\Delta_\rho \setminus \{\rho e^{i\varphi}\}$ gehörige Punkt $\{\rho e^{i\varphi}\}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist und daher o.E. über ganz $\partial\Delta_\rho$ integriert werden kann):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} f'(z) \overline{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} z^v \overline{z}^v \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (v+m) a_m \overline{a_n} z^{m-1} \overline{z}^n dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \rho^{2v} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (v+m) a_m \overline{a_n} \rho^{m-1} e^{i(m-1)\theta} \rho^n e^{-in\theta} i \rho e^{i\theta} d\theta \\
 &\quad \text{gemäß (2.21) bzw. (2.22)} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (v+m) a_m \overline{a_n} \rho^{m+n+2v} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} d\theta \\
 &\quad \text{da } i \rho e^{i\theta} = \frac{d}{d\theta}(\rho e^{i\theta}) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |a_n|^2 \rho^{2n+2v}
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

analog zum Beweis des Flächentheorems für \mathcal{D} .

Schließlich gilt noch mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_{B(\partial\Delta_\rho)} f'(w) \overline{f(w)} dw &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} f'(B(z)) \overline{f(B(z))} B'(z) dz \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_\rho} g'(z) \overline{g(z)} dz \quad \text{wegen } g := f \circ B \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |b_n^{(v)}|^2 \rho^{2n+2v}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

mit der gleichen Argumentation wie für f .

Mit (2.20), (2.23), (2.24) und (2.25) folgt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |b_n^{(v)}|^2 \rho^{2n+2v} \leq \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |a_n|^2 \rho^{2n+2v}.$$

$\rho \rightarrow 1$ liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |b_n^{(v)}|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (v+n) |a_n|^2.$$

Wegen der Voraussetzung $f \in \mathcal{D}_v$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n)|a_n|^2 < \infty, \quad \text{folglich} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (v+n)|b_n^{(v)}|^2 < \infty, \quad \text{d.h.,} \quad f \circ B \in \mathcal{D}_v.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Es gelte nun für ein $f \in \mathcal{D}_v$

$$f(z) = \sum_{n=1}^r a_n z^{v+n}$$

für ein $r \in \mathbb{N}$, d.h., $a_n = 0$ für alle $n > r$. Gemäß Satz 2.5.9 gilt dann für alle $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ und $f(B(z)) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(v)} z^{v+n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (v+n)|b_n^{(v)}|^2 \leq \sum_{n=1}^r (v+n)|a_n|^2.$$

$v+n \geq 0$ ($\forall n > r$) gilt sicherlich dann, wenn $v+r+1 \geq 0$. Damit ergibt sich

$$\sum_{n=1}^r (v+n)|b_n^{(v)}|^2 \leq \sum_{n=1}^r (v+n)|a_n|^2. \quad (2.26)$$

Definition 2.5.11:

Für $(r, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ sei

$$\mathcal{D}_v^r := \left\{ f \in \mathcal{D}_v \mid f(z) = \sum_{n=1}^r a_n z^{v+n} \right\}$$

und für $f(z) = \sum_{n=1}^r a_n z^{v+n}$, $g(z) = \sum_{n=1}^r b_n z^{v+n} \in \mathcal{D}_v^r$ sei

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{D}_v^r} := \sum_{n=1}^r (v+n) a_n \overline{b_n}.$$

Die aus Satz 2.5.9 für $v+r+1 \geq 0$ hergeleitete Beziehung (2.26) ist in der Schreibweise der Definition 2.5.11 offensichtlich gleichbedeutend zu

Korollar 2.5.12:

Seien $r \in \mathbb{N}$ und $v \in \mathbb{R}$ mit $v+r+1 \geq 0$. Für $f \in \mathcal{D}_v^r$ und $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ gelten

$$f \circ B \in \mathcal{D}_v^r \quad \text{und} \quad \langle f \circ B, f \circ B \rangle_{\mathcal{D}_v^r} \leq \langle f, f \rangle_{\mathcal{D}_v^r}.$$

Dieses Korollar wird im nächsten Abschnitt beim Beweis des Pickschen Theorems eine entscheidende Rolle spielen.

2.6 Die Bieberbachsche Vermutung für $n = 2$

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der Bieberbachschen Vermutung für den zweiten Taylorkoeffizienten. Dieses Resultat wird in den nächsten beiden Abschnitten zum Beweis des Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satzes und des Verzerrungssatzes benötigt. Der Beweis wird mittels des Pickschen Theorems geführt.

Satz 2.6.1 (Picksches Theorem):

Sei $B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^n$ aus $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$, so gilt

$$|B_2| \leq 2B_1(1 - B_1).$$

Dem Beweis des Pickschen Theorems wird ein nützlicher Hilfssatz vorangestellt:

Hilfssatz 2.6.2:

Seien $A, C \in \mathbb{R}$ und $B \in \mathbb{C}$. Die Ungleichung

$$A|a_1|^2 + Ba_1\overline{a_2} + \overline{B}a_1a_2 + C|a_2|^2 \geq 0$$

gilt genau dann für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$, wenn

$$A \geq 0, C \geq 0 \quad \text{und} \quad |B|^2 \leq AC.$$

Beweis.

„ \Rightarrow “: Setze $(a_1, a_2) = (1, 0)$. Dann folgt $A \geq 0$. Für $(a_1, a_2) = (0, 1)$ folgt analog $C \geq 0$.

Gilt $A = 0$ und $C = 0$, so setze $a_1 = \overline{B}$, $a_2 = 1$. Dann gilt

$$2|B|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |B|^2 = 0, \quad \text{also} \quad 0 = |B|^2 \leq AC = 0.$$

O.E. sei nun $A > 0$. Der Fall $C > 0$ kann aus Symmetriegründen analog behandelt werden. Setze $a_1 = -\overline{B}$, $a_2 = A$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & A|a_1|^2 + Ba_1\overline{a_2} + \overline{B}a_1a_2 + C|a_2|^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & A|B|^2 - |B|^2 2A + C|A|^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & C|A|^2 \geq A|B|^2 && \text{wegen } A > 0 \\ \Leftrightarrow & CA \geq |B|^2. \end{aligned}$$

Damit ist „ \Rightarrow “ gezeigt.

„ \Leftarrow “: Nach Voraussetzung gilt $A \geq 0, C \geq 0, |B|^2 \leq AC$. Ist $A = 0$ oder $C = 0$, so ist $|B|^2 = 0$, also $B = 0$ und die Behauptung ist trivial.

Seien also im Folgenden $A > 0$ und $C > 0$. Es gilt für $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$:

$$\begin{aligned}
 0 &\leq |Aa_1 + \overline{B}a_2|^2 \\
 &= A^2|a_1|^2 + Aa_1B\overline{a_2} + A\overline{a_1}\overline{B}a_2 + |B|^2|a_2|^2 && \text{wegen } A = \overline{A} \\
 &\leq A^2|a_1|^2 + Aa_1B\overline{a_2} + A\overline{a_1}\overline{B}a_2 + AC|a_2|^2 && \text{wegen } |B|^2 < AC \\
 &\Rightarrow && \text{wegen } A > 0 \\
 0 &\leq A|a_1|^2 + a_1B\overline{a_2} + \overline{a_1}\overline{B}a_2 + C|a_2|^2.
 \end{aligned}$$

□

Beweis. [des Pickschen Theorems] Das Korollar 2.5.12 wird für $r = 2$ auf die Funktion

$$f(z) = \sum_{n=1}^r a_n z^{v+n}$$

aus \mathcal{D}_v^r und

$$(f \circ B)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{(v)} z^{v+n} \quad \text{vgl. (2.17)}$$

für $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ und $v \geq -r - 1 = -3$ angewendet. Das Korollar besagt dann

$$(v+1)|b_1^{(v)}|^2 + (v+2)|b_2^{(v)}|^2 \leq (v+1)|a_1|^2 + (v+2)|a_2|^2. \quad (2.27)$$

In Abschnitt 2.5 über die Verallgemeinerung des Dirichlet-Raums wurden mit den Gleichungen (2.15) und (2.16) zwei Beziehungen für $B(z)^v$ hergeleitet.

Um für die Aussage des Pickschen Theorems eine Beziehung zwischen B_1 und B_2 aufzustellen, ist statt der Gleichung (2.15) folgende Schreibweise günstiger:

$$\begin{aligned}
 B(z)^v &= B_1^v z^v \left[\binom{v}{0} + \binom{v}{1} (B_1^{-1} B_2 z + B_1^{-1} B_3 z + \dots) + \dots \right] \\
 &= B_1^v z^v + v B_1^{v-1} B_2 z^{v+1} + \dots,
 \end{aligned}$$

wobei alle weiteren Summanden mindestens ein B_k mit $k \geq 3$ enthalten. Wegen Gleichung (2.16) gilt

$$B(z)^v = P_0(v) z^v + P_1(v) z^{v+1} + \dots$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$\begin{aligned}
 P_0(v) &= B_1^v \\
 P_1(v) &= v B_1^{v-1} B_2.
 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
 f(B(z)) &= a_1 B(z)^{v+1} + a_2 B(z)^{v+2} + \dots \\
 &= a_1 P_0(v+1) z^{v+1} + a_1 P_1(v+1) z^{v+2} + \dots \\
 &\quad + a_2 P_0(v+2) z^{v+2} + \dots \quad \text{wegen (2.16)} \\
 &= a_1 P_0(v+1) z^{v+1} + [a_1 P_1(v+1) + a_2 P_0(v+2)] z^{v+2} + \dots
 \end{aligned}$$

Die Beziehung (2.27) lässt sich alsdann umschreiben zu

$$\begin{aligned}
 &(v+1) \underbrace{|P_0(v+1)a_1|^2}_{=b_1^{(v)}} + (v+2) \underbrace{|P_1(v+1)a_1 + P_0(v+2)a_2|^2}_{=b_2^{(v)}} \\
 &\leq (v+1)|a_1|^2 + (v+2)|a_2|^2.
 \end{aligned}$$

Wegen $|z|^2 = z\bar{z}$ und $w\bar{z} + \bar{w}z = 2\operatorname{Re}(w\bar{z})$ lässt sich die obige Ungleichung nach Subtraktion der linken von der rechten Seite umformen zu

$$\begin{aligned}
 &[(v+1) - (v+1)|P_0(v+1)|^2 - (v+2)|P_1(v+1)|^2] |a_1|^2 \\
 &- (v+2)P_1(v+1)\overline{P_0(v+2)}a_1\bar{a}_2 \\
 &- (v+2)\overline{P_1(v+1)}P_0(v+2)\bar{a}_1a_2 \\
 &+ [(v+2) - (v+2)|P_0(v+2)|^2] |a_2|^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

Unter Beachtung, dass $v+2 = \overline{v+2}$ und $P_0(v) = B_1^v \in \mathbb{R}$ gilt (da $B_1 = B'(0) > 0$ wegen $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$) sowie dass in f die Koeffizienten (a_1, a_2) beliebig aus \mathbb{C}^2 sein können, liegt mit

$$\begin{aligned}
 A &= (v+1) - (v+1)P_0(v+1)^2 - (v+2)P_1(v+1)^2 \in \mathbb{R}, \\
 B &= -(v+2)P_1(v+1)P_0(v+2) \quad \text{und} \\
 C &= (v+2) - (v+2)P_0(v+2)^2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

die Situation des Hilfssatzes 2.6.2 vor. Daraus folgt $A \geq 0, C \geq 0$ und $|B|^2 \leq AC$. Wegen $B_1 \in \mathbb{R}$ und Gleichung (2.28) gilt also

$$\begin{aligned}
 &(v+1)[1 - B_1^{2v+2}] - (v+2)(v+1)^2 B_1^{2v} |B_2|^2 \geq 0, \\
 &(v+2)[1 - B_1^{2v+4}] \geq 0
 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
 &|(v+2)(v+1)B_1^v B_2 \overline{B_1^{v+2}}|^2 = (v+2)^2 (v+1)^2 B_1^{4v+4} |B_2|^2 \leq \\
 &[(v+1)(1 - B_1^{2v+2}) - (v+2)(v+1)^2 B_1^{2v} |B_2|^2] \cdot (v+2)[1 - B_1^{2v+4}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \\
 &(v+2)^2(v+1)^2 B_1^{4v+4} |B_2|^2 \leq \\
 &(v+1)(1-B_1^{2v+2})(v+2)(1-B_1^{2v+4}) - (v+2)^2(v+1)^2 (B_1^{2v} - B_1^{4v+4}) |B_2|^2 \\
 &\Leftrightarrow \\
 &(v+2)^2(v+1)^2 B_1^{2v} |B_2|^2 \leq (v+1)(1-B_1^{2v+2})(v+2)(1-B_1^{2v+4}) \\
 &\Rightarrow \\
 &|B_2|^2 \leq B_1^{-2v} \frac{(1-B_1^{2v+2})}{v+1} \frac{(1-B_1^{2v+4})}{v+2}
 \end{aligned}$$

für alle $v \geq -3$ und $v \notin \{-2, -1\}$. Setzt man $v = -\frac{3}{2}$, so ergibt sich

$$|B_2|^2 \leq B_1^3 \frac{(1-B_1^{-1})}{-\frac{1}{2}} \frac{(1-B_1)}{\frac{1}{2}} = B_1^2 \frac{(B_1-1)}{-\frac{1}{2}} \frac{(1-B_1)}{\frac{1}{2}} = 4B_1^2(1-B_1)^2$$

und nach Ziehen der Wurzel $|B_2| \leq 2B_1(1-B_1)$.

Natürlich muss hier $1-B_1 \geq 0$, also $B_1 \leq 1$, gelten. Dies ist jedoch trivial, da $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ und damit auch $B \in \mathcal{B}$. Also folgt aufgrund des Schwarzschen Lemmas $B_1 = B'(0) \leq 1$.

Damit ist das Picksche Theorem bewiesen. □

Theorem 2.6.3 (Bieberbach):

Sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ aus \mathcal{R} , so gilt $|a_2| \leq 2a_1$.

Beweis. Für $r \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < 1$ gilt $rz \in \Delta_r \subsetneq \Delta$ für alle $z \in \Delta$. Wegen $\overline{\Delta_r} \subset \Delta$ und der Kompaktheit von $\overline{\Delta_r}$ ist $f(w)$ für alle $w \in \overline{\Delta_r}$ beschränkt auf $\overline{\Delta_r}$ und somit auch auf Δ_r . Folglich ist $f(rz)$ beschränkt auf Δ . Es gibt also ein $M > 0$ mit

$$f(rz) < M \quad (\forall z \in \Delta).$$

Damit ist

$$B(z) = \frac{1}{M} f(rz) \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}.$$

Offensichtlich gilt $B(0) = 0$ und $B(\Delta) \subset \Delta$ sowie

$$B'(0) = \frac{1}{M} f'(0)r = \frac{1}{M} a_1 r > 0,$$

denn wegen $a_1 = f'(0)$ und $f \in \mathcal{R}$ folgt die Gültigkeit von $a_1 > 0$. Die Taylorentwicklung von $B(z) = \frac{1}{M} f(rz)$ lautet offensichtlich $B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n r^n}{M} z^n$.

Das Picksche Theorem (Satz 2.6.1) liefert nun

$$\frac{|a_2 r^2|}{M} \leq \frac{2a_1 r}{M} \left(1 - \frac{a_1 r}{M}\right).$$

Wegen $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ (also $B \in \mathcal{B}$ und $B \in \mathcal{R}$) ist nach dem Schwarzschen Lemma

$$0 < \frac{a_1 r}{M} = B'(0) \leq 1.$$

Folglich hat man

$$\frac{|a_2 r^2|}{M} \leq \frac{2a_1 r}{M}$$

und damit $|a_2| r \leq 2a_1$. $r \rightarrow 1$ liefert die Behauptung. \square

In einer Fußnote seines Artikels „Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln“ [Bie16, S.946] stellte Bieberbach mit den Worten „Daß $k_n \geq n$ zeigt das Beispiel $\sum n z^n$. Vielleicht ist überhaupt $k_n = n$.“ seine berühmte Vermutung auf.⁵

2.7 Größe des Bildbereichs

Es wird in diesem Abschnitt gezeigt, dass der Bildbereich einer normalisierten Riemannschen Abbildungsfunktion eine minimale Größe besitzt.

Satz 2.7.1 (Koebescher $\frac{1}{4}$ -Satz):

Ist $f \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\Delta_{\frac{1}{4}f'(0)} \subset f(\Delta).$$

Beweis. Es sei $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{R}$. Für $h := \frac{f}{a_1}$ gilt dann $h \in \mathcal{S}$, d.h., $h(0) = 0$ und $h'(0) = 1$. Die Behauptung ist bewiesen, wenn gezeigt wird, dass für jeden Punkt $c \in \mathbb{C} \setminus h(\Delta)$ gilt $|c| \geq \frac{1}{4}$, denn dann gilt natürlich

$$|d| \geq \frac{1}{4}f'(0) \quad (\forall d \in \mathbb{C} \setminus f(\Delta) = \mathbb{C} \setminus a_1 h(\Delta)).$$

Sei also $c \in \mathbb{C} \setminus h(\Delta)$. Die Funktion

$$g(z) := \frac{ch(z)}{c - h(z)} = \frac{-c^2 + ch(z) + c^2}{c - h(z)} = -c + \frac{c^2}{c - h(z)}$$

⁵Bieberbach versteht unter k_n die Taylorkoeffizienten einer Funktion aus \mathcal{S} .

ist schlicht auf Δ , da für $w, z \in \Delta$ aus $g(z) = g(w)$ sofort $c - h(w) = c - h(z)$ folgt, also $z = w$ wegen $h \in \mathcal{S}$. Die Holomorphie von g ist klar.

Weiter gilt

$$g'(0) = \frac{c^2 h'(z)}{(c - h(z))^2} \Big|_{z=0} = \frac{c^2}{c^2} = 1 = h'(0),$$

da $h \in \mathcal{S}$. Wegen $g(0) = 0$ gilt also auch $g \in \mathcal{S}$.

Seien

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} h_n z^n \quad \text{und} \quad g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n z^n$$

die Taylorentwicklungen von h bzw. g . Weiter sei $t(z) := c - h(z)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & [z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots] \cdot [c - z - h_2 z^2 - h_3 z^3 - \dots] \\ &= c[z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots] \\ &\quad - z[z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots] \\ &\quad - h_2 z^2[z + g_2 z^2 + g_3 z^3 + \dots] - \dots \\ &= cz + cg_2 z^2 - z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} u_k z^k \end{aligned}$$

für gewisse $u_k \in \mathbb{C}$ ($k \geq 3$). Der Koeffizient von z^2 in der Taylorentwicklung von $g(z) \cdot t(z)$ ist also gleich $cg_2 - 1$.

Andererseits ist

$$g(z) \cdot t(z) = cg(z) - g(z)h(z) = \frac{c^2 h(z)}{c - h(z)} - \frac{ch^2(z)}{c - h(z)} = ch(z)$$

und der Koeffizient von z^2 in der Taylorentwicklung von $ch(z)$ ist ch_2 .

Wegen der Eindeutigkeit der Taylorentwicklung folgt $cg_2 - 1 = ch_2$ und damit $h_2 + \frac{1}{c} = g_2$. Wegen $g, h \in \mathcal{S}$ folgt nach dem Theorem von Bieberbach (Satz 2.6.3)

$$|h_2| \leq 2 \quad \text{und} \quad |g_2| = |h_2 + \frac{1}{c}| \leq 2$$

und damit

$$\left| \frac{1}{c} \right| = \left| \frac{1}{c} + h_2 - h_2 \right| \leq |g_2| + |h_2| \leq 2 + 2 = 4, \quad \text{d.h.} \quad |c| \geq \frac{1}{4},$$

was zu zeigen war. □

Lemma 2.7.2:

Die Grenze $\frac{1}{4}f'(0)$ im Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satz ist scharf.

Beweis. Für die parametrisierten Koebe-Funktionen $f_{w,t}(z) = \frac{tz}{(1-wz)^2}$ (mit $t > 0$ und $|w| = 1$) wurde bereits

$$f_{w,t}(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{u}{4w} \mid \forall u \in \mathbb{R} \text{ mit } u \geq t \right\}$$

gezeigt (siehe Gleichung (2.6) in Abschnitt 2.2). Wegen

$$\frac{1}{4}f'_{w,t}(0) = \frac{1}{4} \left[\frac{t}{(1-wz)^2} \cdot \frac{1+wz}{1-wz} \right]_{z=0} = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \left| \frac{t}{4w} \right| = \frac{t}{4}$$

liegt folglich $\Delta_{\frac{t}{4}} = \Delta_{\frac{1}{4}f'_{w,t}(0)}$ in $f_{w,t}(\Delta)$, aber es gilt

$$\frac{t}{4w} \in \partial \Delta_{\frac{1}{4}f'_{w,t}(0)} \quad \text{und} \quad \frac{t}{4w} \notin f_{w,t}(\Delta).$$

Die Grenze lässt sich also nicht weiter verschärfen. □

2.8 Verzerrungssatz

In diesem Abschnitt wird mittels des Bieberbach-Theorems und des Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satzes der Verzerrungssatz hergeleitet. Dieser Satz sowie der Koebesche $\frac{1}{4}$ -Satz werden im nächsten Abschnitt für den Beweis des Carathéodoryschen Konvergenzsatzes benötigt. Mittels einiger Folgerungen aus dem Konvergenzsatz sowie wieder dem Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satz ist es dann möglich, das angestrebte Hauptresultat dieser Arbeit, die Parametrisierbarkeit aller Löwner-Familien, herzuleiten.

Der Verzerrungssatz besagt im Wesentlichen, dass sich die Bilder von Kreislinien einer Riemannschen Abbildungsfunktion sowie ihrer Ableitung durch Ausdrücke beschränken lassen (sowohl nach unten als auch nach oben), die sich ausschließlich durch Terme in den Radien der Kreislinien ausdrücken lassen, wobei sich zudem erweisen wird, dass diese Grenzen scharf sind.

Satz 2.8.1 (Verzerrungssatz):

Es seien $f \in \mathcal{R}$, $z \in \Delta$ und $r \in [0, 1)$ mit $|z| = r$. Dann gilt

$$f'(0) \frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq f'(0) \frac{r}{(1-r)^2}, \quad (2.29)$$

$$f'(0) \frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq f'(0) \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad (2.30)$$

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}. \quad (2.31)$$

Nimmt man für $z \in \triangle$ die Zahl $w \in \partial\triangle$ mit $wz = r$ bzw. $wz = -r$ (dass diese Wahl möglich ist, ist klar wegen $|z| = r$), so gilt in den obigen Ungleichungen das Gleichheitszeichen, d.h., die Grenzen sind scharf, wenn man für $t > 0$ beliebig eine der parametrisierten Koebe-Funktionen $f_{w,t}(z) = \frac{tz}{(1-wz)^2}$ wählt.

Beweis. Es wird zunächst der Zusatz bewiesen.

Seien also $r \in (0, 1)$, $t > 0$, $w \in \partial\triangle$ und $z \in \triangle$ mit $wz = \pm r$ und sei weiterhin $f_{w,t}(z) = \frac{tz}{(1-wz)^2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} f'_{w,t}(z) &= \frac{t(1-wz)^2 - tz \cdot 2(1-wz)(-w)}{(1-wz)^4} \\ &= \frac{t(1-wz) + 2twz}{(1-wz)^3} = \frac{t + twz}{(1-wz)^3} = t \frac{1+wz}{(1-wz)^3}, \end{aligned}$$

folglich $f'_{w,t}(0) = t$ und für $z = \pm \frac{r}{w}$

$$f_{w,t}(z) = f_{w,t}\left(\pm \frac{r}{w}\right) = \frac{\pm \frac{r}{w}t}{(1 \pm r)^2},$$

also

$$\frac{|f_{w,t}(z)|}{f'_{w,t}(0)} = \frac{\left|\pm \frac{r}{w}\right|}{(1 \pm r)^2} = \frac{r}{(1 \pm r)^2}.$$

Somit sind die beiden Ungleichungen in (2.29) scharf.

Weiter hat man unter Beachtung von $wz = \pm r$

$$\frac{|f'_{w,t}(z)|}{f'_{w,t}(0)} = \frac{t(1+wz)}{t(1-wz)^3} = \frac{1 \pm r}{(1 \mp r)^3},$$

woraus sofort die Schärfe der Ungleichungen in (2.30) folgt.

Schließlich gilt unter Beachtung von $wz = \pm r$

$$\left| z \frac{f'_{w,t}(z)}{f_{w,t}(z)} \right| = \left| \frac{z \frac{t(1+wz)}{(1-wz)^3}}{\frac{tz}{(1-wz)^2}} \right| = \left| \frac{1+wz}{1-wz} \right| = \left| \frac{1 \pm r}{1 \mp r} \right|,$$

womit auch die Schärfe der Ungleichungen in (2.31) erwiesen ist.

Es folgt nun der eigentliche Beweis des Verzerrungssatzes.

Es sei $w = se^{i\varphi} \in \triangle$ fest gewählt. Da $z \mapsto \frac{z+w}{1+\overline{w}z}$ ein Automorphismus von \triangle ist, ergibt sich auf \triangle die Schlichtheit von g ,

$$g(z) := f\left(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}\right).$$

Die Taylorentwicklung von g lautet $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ ($g_n \in \mathbb{C}$).

Für $g_1 = g'(0)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} g_1 &= f' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{1+\bar{w}z - (z+w)\bar{w}}{(1+\bar{w}z)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= f' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{1-|w|^2}{(1+\bar{w}z)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &= f'(w)(1-|w|^2). \end{aligned}$$

Für $g_2 = \frac{1}{2}g''(0)$ erhält man

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{1}{2}f'' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{1-|w|^2}{(1+\bar{w}z)^2} \right) \left(\frac{1-|w|^2}{(1+\bar{w}z)^2} \right) \Big|_{z=0} \\ &\quad + \frac{1}{2}f' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{-2\bar{w}(1-|w|^2)}{(1+\bar{w}z)^3} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2}f'' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{1-|w|^2}{(1+\bar{w}z)^2} \right)^2 \Big|_{z=0} \\ &\quad + \frac{1}{2}f' \left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z} \right) \cdot \left(\frac{-2\bar{w}(1-|w|^2)}{(1+\bar{w}z)^3} \right) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{2}(f''(w)(1-|w|^2)^2 - f'(w)\bar{w}(1-|w|^2)). \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist $t_\lambda := \lambda(g - g_0)$ schlicht mit $t_\lambda(0) = 0$.

Es ist

$$t'_\lambda(0) = \lambda g'(0) = \lambda(1-|w|^2)f'(w).$$

Wegen der Schlichtheit von f ist $f'(w) \neq 0$. Mit $\lambda_0 := \frac{1}{f'(w)}$ gilt daher $t'_{\lambda_0}(0) > 0$, d.h., $t_{\lambda_0} \in \mathcal{R}$.

Der Koeffizient von z^2 der Taylorentwicklung von $t_{\lambda_0} = \lambda_0 g - \lambda_0 g_0$ ist λg_2 . Alsdann gilt nach dem Theorem von Bieberbach (Theorem 2.6.3)

$$|\lambda g_2| \leq 2|\lambda g_1| \quad \text{und damit} \quad |g_2| \leq 2g_1.$$

Aufgrund der oben berechneten Werte für g_1 und g_2 folgt daraus

$$\left| \frac{1}{2}f''(w)(1-|w|^2)^2 - w(1-|w|^2)f'(w) \right| \leq 2(1-|w|^2)^2|f'(w)|.$$

Da $1-|w|^2 > 0$ und wegen der Schlichtheit von f auch $|f'(w)| > 0$ gilt, folgt

mittels Division durch die rechte Seite und anschließender Multiplikation mit 2:

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f''(w)}{f'(w)}(1 - |w|^2) - 2\overline{w} \right| \leq 4 \\
 \Leftrightarrow & \left| \frac{f''(w)}{f'(w)}(1 - s^2) - 2se^{-i\varphi} \right| \leq 4 \\
 \Leftrightarrow & \left| w \frac{f''(w)}{f'(w)}(1 - s^2) - 2 \underbrace{wse^{-i\varphi}}_{=s^2} \right| \leq 4|w| = 4s \\
 \Leftrightarrow & \left| w \frac{f''(w)}{f'(w)} - \frac{2s^2}{1 - s^2} \right| \leq \frac{4s}{1 - s^2}.
 \end{aligned}$$

Folglich gilt auch

$$\left| \operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} - \frac{2s^2}{1 - s^2} \right] \right| \leq \frac{4s}{1 - s^2}.$$

Da $\frac{2s^2}{1-s^2} \in \mathbb{R}$ gilt, folgt

$$\frac{-4s}{1 - s^2} + \frac{2s^2}{1 - s^2} \leq \operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} \right] \leq \frac{4s}{1 - s^2} + \frac{2s^2}{1 - s^2}$$

und deshalb gilt

$$\frac{2s^2 - 4s}{1 - s^2} \leq \operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} \right] \leq \frac{2s^2 + 4s}{1 - s^2}. \quad (2.32)$$

Da f schlicht auf \triangle ist, besitzt f' keine Nullstelle in \triangle . Da zudem \triangle einfach-zusammenhängend ist, existiert alsdann ein holomorpher Logarithmus $\log f'$ von f' auf \triangle . Man erhält somit

$$\operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} \right] = \operatorname{Re} \left[se^{i\varphi} \frac{f''(se^{i\varphi})}{f'(se^{i\varphi})} \right] = s \operatorname{Re} \left[\frac{f''(se^{i\varphi}) \cdot e^{i\varphi}}{f'(se^{i\varphi})} \right]. \quad (2.33)$$

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial s} \log f'(se^{i\varphi}) = \frac{f''(se^{i\varphi}) \cdot e^{i\varphi}}{f'(se^{i\varphi})}$$

und alsdann

$$\frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} \log f'(se^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \left[\frac{f''(se^{i\varphi}) \cdot e^{i\varphi}}{f'(se^{i\varphi})} \right]$$

folgt aus der Gleichung (2.33)

$$\operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} \right] = s \frac{\partial}{\partial s} \operatorname{Re} \log f'(se^{i\varphi}).$$

Wegen

$$\log f'(se^{i\varphi}) = \log_{\mathbb{R}} |f'(se^{i\varphi})| + 2\pi i k$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ folgt

$$\operatorname{Re} \log f'(se^{i\varphi}) = \log_{\mathbb{R}} |f'(se^{i\varphi})|$$

und somit hat man letztendlich

$$s \frac{\partial}{\partial s} \log |f'(se^{i\varphi})| = \operatorname{Re} \left[w \frac{f''(w)}{f'(w)} \right].$$

Mithin lässt sich Gleichung (2.32) äquivalent umschreiben zu

$$\frac{2s^2 - 4s}{1 - s^2} \leq s \frac{\partial}{\partial s} \log |f'(se^{i\varphi})| \leq \frac{2s^2 + 4s}{1 - s^2}$$

und damit zu

$$\frac{2s - 4}{1 - s^2} \leq \frac{\partial}{\partial s} \log |f'(se^{i\varphi})| \leq \frac{2s + 4}{1 - s^2}.$$

Alle drei Terme sind nullstellenfrei, somit erhält die Integration von 0 bis r die \leq -Beziehungen. Es folgt

$$\int_0^r \frac{2s - 4}{1 - s^2} ds \leq \int_0^r \frac{\partial}{\partial s} \log |f'(se^{i\varphi})| ds \leq \int_0^r \frac{2s + 4}{1 - s^2} ds,$$

also

$$\log \frac{1 - r}{(1 + r)^3} \leq \log |f'(re^{i\varphi})| - \log f'(0) \leq \log \frac{1 + r}{(1 - r)^3}.$$

Wegen der streng steigenden Monotonie von $\exp_{\mathbb{R}}$ liefert Exponentiation und anschließende Multiplikation mit $f'(0)$ die Beziehung (2.30) des Verzerrungssatzes.

Als nächstes werden die Ungleichungen in (2.29) bewiesen.

Sei wieder $z = re^{i\varphi}$ ($r \in [0, 1)$). Mit der kanonischen Parametrisierung

$$[0, r] \rightarrow \partial\Delta, \quad t \mapsto te^{i\varphi}$$

folgt

$$\begin{aligned} |f(re^{i\varphi})| &= |f(re^{i\varphi}) - f(0)| && \text{da } f \in \mathcal{R} \\ &= \left| \int_0^r f'(te^{i\varphi}) e^{i\varphi} dt \right| \\ &\leq \int_0^r |f'(te^{i\varphi})| dt && \text{da } |e^{i\varphi}| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^r f'(0) \frac{1+t}{(1-t)^3} dt && \text{wegen (2.30)} \\
 &= f'(0) \int_0^r \frac{1+t}{(1-t)^3} dt = f'(0) \frac{r}{(1-r)^2}.
 \end{aligned}$$

Damit ist die rechte Seite in (2.29) bewiesen.

Zum Nachweis der linken Ungleichung in (2.29) wird eine Fallunterscheidung vorgenommen.

Fall 1: $|f(re^{i\varphi})| \geq \frac{f'(0)}{4}$.

Dann ist

$$|f(re^{i\varphi})| \geq \frac{1}{4}f'(0) > \frac{r}{(1-r)^2}f'(0),$$

denn es ist $f'(0) > 0$, da $f \in \mathcal{R}$ und

$$(1+r)^2 > 4r \Leftrightarrow 1+2r+r^2 > 4r \Leftrightarrow 1-2r+r^2 > 0 \Leftrightarrow (1-r)^2 > 0,$$

was wegen $r \in [0, 1)$ zutrifft.

Fall 2: $|f(re^{i\varphi})| < \frac{f'(0)}{4}$.

Man betrachte das Intervall $L = [0, f(re^{i\varphi})]$. Nach dem Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satz gilt

$$\Delta_{\frac{f'(0)}{4}} \subseteq f(\Delta),$$

alsdann wegen

$$|f(re^{i\varphi})| < \frac{f'(0)}{4}$$

auch $L \subset f(\Delta)$.

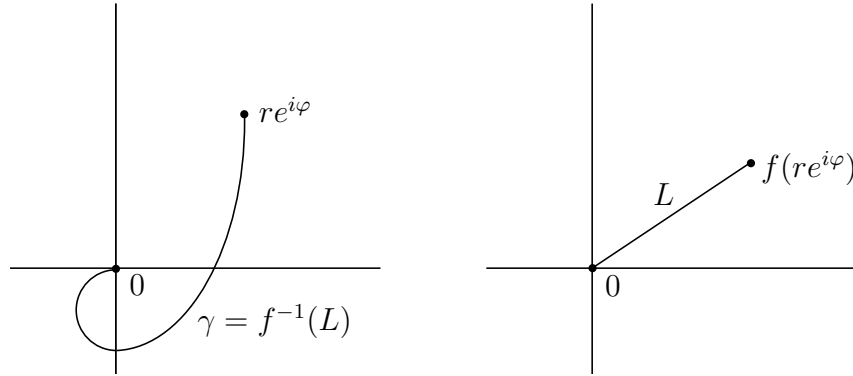
Sei $\gamma = f^{-1}(L)$ (siehe Abbildung 2.9). Die Länge eines Weges W werde mit $l(W)$ bezeichnet. $l(L) = |f(re^{i\varphi})|$ ist klar. Folglich hat man

$$|f(re^{i\varphi})| \leq l(L) = \int_L |d\zeta| = \int_\gamma |f'(\zeta)| |d\zeta|$$

und wegen (2.29)

$$\geq \int_\gamma \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} f'(0) |d\zeta|. \quad (2.34)$$

Die Geodäte (bzgl. der Euklidischen Topologie auf \mathbb{C}) zwischen zwei Punkten W_1, W_2 in \mathbb{C} ist $[W_1, W_2]$. Somit gilt für jedes Kurvenintegral mit nicht-


 Abbildung 2.9: Weg γ als Urbild von L unter der Abbildung f

negativem Integranden über einen längeren Weg zwischen W_1 und W_2 , dass es größer gleich dem über $[W_1, W_2]$ erstreckten Kurvenintegral ist. Folglich lässt sich (2.34) weiter abschätzen zu

$$\int_{\gamma} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} f'(0) |d\zeta| \geq \int_{[0, re^{i\varphi}]} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} f'(0) |d\zeta|$$

und mit der kanonischen Parametrisierung $t \rightarrow te^{i\varphi} =: \zeta(t)$ zu

$$\int_{\gamma} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} f'(0) |d\zeta| \geq \int_0^r \frac{1-|te^{i\varphi}|}{(1+|te^{i\varphi}|)^3} f'(0) |\zeta'(t)| dt.$$

Wegen $|\zeta'(t)| = \left| \frac{d}{dt}(te^{i\varphi}) \right| = |e^{i\varphi}| = 1$ ergibt sich

$$\int_{\gamma} \frac{1-|\zeta|}{(1+|\zeta|)^3} f'(0) |d\zeta| \geq \int_0^r \frac{1-t}{(1+t)^3} f'(0) dt = f'(0) \frac{r}{1+r^2}.$$

Damit ist auch die linke Ungleichung in (2.29) bewiesen.

Es verbleiben noch die Ungleichungen in (2.31) nachzuweisen.

Sei $w = se^{i\varphi} \in \triangle$ mit $s \in [0, 1)$. Weiter sei $g(z) = f\left(\frac{z+w}{1+\overline{w}z}\right)$ mit dem \triangle -Automorphismus $z \mapsto \frac{z+w}{1+\overline{w}z}$. Wörtlich wie im Beweis zu (2.30) zeigt man die Existenz eines $\lambda_0 \in \partial\triangle$, so dass $g(z) - g(0)$ in \mathcal{R} liegt. Folglich gilt gemäß (2.29) mit $|z| = r$

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} |g'(0)| \leq |g(z) - g(0)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} |g'(0)|$$

und damit

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2}|g'(0)| = \left| f\left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z}\right) - f(w) \right| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}|g'(0)|.$$

Ebenfalls beim Beweis von (2.30) wurde

$$g'(0) = (1-|w|^2)f'(w)$$

gezeigt, so dass man

$$\begin{aligned} \frac{|z|}{(1+|z|)^2}(1-|w|^2)|f'(w)| &\leq \left| f\left(\frac{z+w}{1+\bar{w}z}\right) - f(w) \right| \\ &\leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2}(1-|w|^2)|f'(w)| \end{aligned}$$

erhält. Für $z := -w$ folgt

$$\frac{|w|}{(1+|w|)^2}(1-|w|^2)|f'(w)| \leq |f(w)| \leq \frac{|w|}{(1-|w|)^2}(1-|w|^2)|f'(w)|.$$

Wegen $-w = re^{-i\varphi}$ und also $|w| = |-w| = r$ folgt schließlich

$$\frac{r}{(1+r)^2}(1-r^2)|f'(z)| \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}(1-r^2)|f'(z)|$$

und damit

$$\frac{1-r^2}{(1+r)^2} \leq \left| \frac{f(z)}{rf'(z)} \right| \leq \frac{1-r^2}{(1-r)^2}.$$

Wegen $r = |z|$ lassen sich die letzten Ungleichungen umschreiben zu

$$\frac{(1-r)^2}{1-r^2} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{(1+r)^2}{1-r^2},$$

also

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r},$$

womit auch die Ungleichungen in (2.31) nachgewiesen sind.

Damit ist der Verzerrungssatz vollständig bewiesen. □

2.9 Konvergenzsatz von Carathéodory

Als ein weiteres mächtiges Hilfsmittel auf dem Weg zum Hauptsatz dieser Arbeit, der Parametrisierbarkeit der Löwner-Familien, wird nun der Carathéodorysche Konvergenzsatz bewiesen.

Die Essenz dieses Theorems ist eine vollständige Charakterisierung der kompakten Konvergenz einer Funktionenfolge aus \mathcal{R} einzig und allein in Termen der Bildbereiche der Funktionenfolglieder, wie Schiff in [Sch93, S.67] treffend konstatiert.

Es ist naheliegend, dass ein derartiger Satz im Kontext dieser Arbeit wertvoll ist, da Löwner-Familien als Ketten untergeordneter Funktionen eingeführt wurden und sich, wie in Lemma 2.3.2 in Abschnitt 2.3 bewiesen wurde, die Unterordnung vollständig mittels der Teilmengenbeziehung zwischen den Bildbereichen der Funktionen ausdrücken lässt.

Definition 2.9.1:

Es seien G_1, G_2, \dots Gebiete in \mathbb{C} mit 0 als innerem Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Der Kern der Folge (G_n) sei das größte Gebiet $T \subset \mathbb{C}$ mit der folgenden Eigenschaft:

- $0 \in T$ und jedes Kompaktum $K \subset T$ ist Teilmenge aller G_n bis auf endlich viele Ausnahmen.

Der Kern der Folge (G_n) wird mit $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ bezeichnet.

Es ist von vornherein in keinsten Weise evident, dass es zu jeder Folge (G_n) wie in Definition 2.9.1 überhaupt ein Gebiet T mit den geforderten Eigenschaften gibt. Dass es so ist, zeigt der Beweis zu

Lemma 2.9.2:

Sei (G_n) eine Gebietsfolge in \mathbb{C} mit 0 als innerem Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Dann ist $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ wohldefiniert.

Beweis. Sei \mathcal{A} die Menge aller Gebiete $R \subset \mathbb{C}$, so dass $0 \in R$ gilt und jedes Kompaktum $K \subset R$ in allen bis auf endlich vielen G_n enthalten ist. Nach Definition der Folge (G_n) ist 0 ein innerer Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, d.h., es gibt ein $\delta > 0$ mit

$\Delta_\delta \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ und folglich $\Delta_\delta \subset G_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). Definitionsgemäß ist $0 \in \Delta_\delta$ und für jedes Kompaktum $K \subset \Delta_\delta$ gilt $K \subset G_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), d.h. aber $\Delta_\delta \in \mathcal{A}$. Mithin gilt $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Es werde nun definiert

$$T := \bigcup_{R \in \mathcal{A}} R.$$

Es genügt zu zeigen, dass T selbst aus \mathcal{A} ist.

Da Gebiete offen und die Vereinigung offener Mengen wieder offen ist, ergibt sich die Offenheit von T .

T erweist sich zudem als Gebiet, d.h., es ist noch der Zusammenhang von T zu zeigen. Seien also $z_1, z_2 \in T$. Nach Definition von T existieren $R_1, R_2 \in \mathcal{A}$ mit $z_1 \in R_1$ und $z_2 \in R_2$. Weiter gilt $0 \in R_1, R_2$ nach Definition von \mathcal{A} . Da in \mathbb{C} (allgemein \mathbb{R}^n) die Begriffe *zusammenhängend* und *wegweise zusammenhängend* äquivalent sind, gibt es einen Weg W_1 in R_1 , der z_1 und 0 verbindet und einen Weg W_2 in R_2 , der 0 und z_2 verbindet. Der Weg $W_1 + W_2$ liegt dann in $R_1 \cup R_2$ und verbindet z_1 und z_2 . Wegen $R_1 \cup R_2 \subset T$ ergibt sich der Zusammenhang von T .

T ist also ein Gebiet mit $0 \in T$. Sei nun K ein Kompaktum in T . Nach Definition von T gibt es zu jedem $w \in T$ ein $R \in \mathcal{A}$ mit $w \in R$ und wegen der Offenheit von R gibt es ein $\delta_w > 0$ mit $\Delta_{\frac{\delta_w}{2}}(w) \subset R$, folglich

$$\overline{\Delta_{\frac{\delta_w}{2}}(w)} \subset R. \quad (2.35)$$

Aufgrund von (2.35) gilt $T = \bigcup_{w \in T} \overline{\Delta_{\frac{\delta_w}{2}}(w)}$. Daher bilden die $\overline{\Delta_{\frac{\delta_w}{2}}(w)}$ ($w \in T$) eine offene Überdeckung von T und damit erst recht von K . Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Mengen $\overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_1}}{2}}(w_1)}, \dots, \overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_k}}{2}}(w_k)}$, die K überdecken und für die wegen (2.35) sogar gilt

$$\overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_j}}{2}}(w_j)} \subset R_j$$

für gewisse $R_j \in \mathcal{A}$ ($j = 1, \dots, k$). Es gilt dann

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k \overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_j}}{2}}(w_j)} \subset \bigcup_{j=1}^k R_j.$$

Nach Definition von \mathcal{A} gilt für ein endliches $E_j \subset \mathbb{N}$ mit $j \in \{1, \dots, k\}$ alsdann

$$\overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_j}}{2}}(w_j)} \subset G_n \quad (\forall n \in \mathbb{N} \setminus E_j, j = 1, \dots, k),$$

folglich

$$K \subset \bigcup_{j=1}^k \overline{\Delta_{\frac{\delta_{w_j}}{2}}(w_j)} \subset G_n \quad \left(\forall n \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{j=1}^k E_j \right).$$

Da auch $\bigcup_{j=1}^k E_j$ endlich ist, ist somit $T \in \mathcal{A}$ bewiesen. \square

Satz 2.9.3 (Carathéodoryscher Konvergenzsatz):

Sei (f_n) eine Folge aus \mathcal{R} und (G_n) die zugehörige Bildfolge $(f_n(\Delta))$, so dass 0 ein innerer Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) (f_n) konvergiert kompakt gegen ein (nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz holomorphes) $f \in \mathcal{O}(\Delta)$.
- (2) Es gelte
 - (i) Für jede Gebietsteilfolge (G_{n_k}) gilt

$$\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) = \text{Ker}(G_{n_1}, G_{n_2}, \dots),$$

- (ii) $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) \neq \mathbb{C}$.

Trifft eine dieser beiden (äquivalenten) Aussagen zu, so gilt

- f ist schlicht,
- $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) = f(\Delta)$,
- (f_n^{-1}) konvergiert kompakt gegen f^{-1} auf $f(\Delta)$.⁶

Definition 2.9.4:

Ist (G_n) eine Folge einfach-zusammenhängender Gebiete mit 0 als innerem Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, so heißt die Folge (G_n) konvergent im Sinne von Carathéodory gegen G , falls die Bedingungen (i) und (ii) des Carathéodoryschen Konvergenzsatzes erfüllt sind und $G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ gilt.

Beweis. [des Carathéodoryschen Konvergenzsatzes] Es wird zunächst angenommen, dass (f_n) kompakt gegen ein $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert. Es sei $G = f(\Delta)$. Der Beweis erfolgt nun in vier Schritten:

Im ersten Schritt wird die Schlichtheit von f gezeigt; im zweiten Schritt wird vorbereitend $G \subset \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ gezeigt; im dritten Schritt wird die kompakte Konvergenz von (f_n^{-1}) gegen f^{-1} und zusätzlich noch die ausstehende Beziehung $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) \subset G$ gezeigt; im vierten Schritt wird schließlich die Äquivalenz gezeigt.

⁶Dieses ist die wörtliche Wiedergabe des Carathéodoryschen Konvergenzsatzes aus [RR94, S.170]. Natürlich sind die (f_n^{-1}) i.A. nicht auf ganz $f(\Delta)$ definiert. Die obige Schreibweise lässt sich dennoch rechtfertigen, da es um kompakte Konvergenz geht. Da nämlich $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) = f(\Delta)$ gilt, ist jedes Kompaktum $K \subset f(\Delta)$ in allen bis auf höchstens endlich vielen G_j enthalten. In [RS07, S.329] findet sich die Präzisierung „... die inversen Abbildungen f_n^{-1} konvergieren auf jedem Kompaktum $K \subset \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ für $n \geq n(K)$ gleichmäßig gegen $f^{-1}|_K$.“ Diese Präzisierung trägt nichts zum Verständnis des Satzes bei, weshalb der Formulierung aus [RR94] der Vorzug gegeben wurde.

Schritt 1: Da laut Voraussetzung $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ die 0 als inneren Punkt enthält, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\Delta_\delta \subseteq G_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Wegen $G_n = f_n(\Delta)$ und des globalen Umkehrsatzes ist $f_n^{-1}|_{\Delta_\delta}$ holomorph und wegen $\text{Bild}(f_n^{-1}|_{\Delta_\delta}) \subset \Delta$ beschränkt. Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $f_n(0) = 0$ auch $f_n^{-1}(0) = 0$. Auf die Funktionen

$$t_n : \Delta \rightarrow \mathbb{C}, \quad t_n(w) = f_n^{-1}(\delta w)$$

lässt sich (unter Beachtung von $\delta w \in \Delta$) das Schwarzsche Lemma anwenden, so dass man $|t_n(w)| \leq |w|$ erhält für $w \in \Delta$. Es folgt für $n \geq 1$ wegen $t_n(0) = 0$:

$$|t'_n(0)| = \left| \lim_{w \rightarrow 0} \frac{t_n(w)}{w} \right| \leq \frac{|w|}{|w|} = 1. \quad (2.36)$$

Andererseits gilt

$$t_n(w) = f_n^{-1}(\delta w), \quad \text{also} \quad t'_n(w) = \delta (f_n^{-1})'(\delta w),$$

d.h.,

$$\frac{1}{\delta} t'_n(w) = (f_n^{-1})'(\delta w) = \frac{1}{f'_n(\delta w)}.$$

Es folgt für $w = 0$ wegen (2.36)

$$\frac{1}{f'_n(0)} = \frac{1}{\delta} t'_n(0) \leq \frac{1}{\delta},$$

d.h.,

$$f'_n(0) \geq \delta > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Somit gilt auch $f'(0) \geq \delta > 0$ und f ist daher nicht konstant. Hiermit ist G offen und nach Satz A.1.7 ist alsdann f schlicht.

Schritt 2: Um $G \subset \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ nachzuweisen, ist zu zeigen, dass $0 \in G$ gilt und dass jedes Kompaktum $K \subset G$ in allen bis auf endlich vielen G_n enthalten ist.

Wegen $f \in \mathcal{R}$ gilt zunächst $0 \in f(\Delta) = G$. Sei nun $K \subset G$ ein Kompaktum. Da $f : \Delta \rightarrow G$ ein Homöomorphismus ist, ist $f^{-1}(K)$ kompakt in Δ und als Kompaktum besitzt $f^{-1}(K)$ von $\partial\Delta$ einen positiven Abstand

$$\text{dist}(K, \partial\Delta) = \inf_{(u,v) \in K \times \partial\Delta} \{|u - v|\} > 0.$$

Folglich gibt es ein $r \in (0, 1)$, z.B.

$$r = 1 - \frac{\text{dist}(K, \partial\Delta)}{2},$$

mit

$$f^{-1}(K) \subsetneq \Delta_r. \quad (2.37)$$

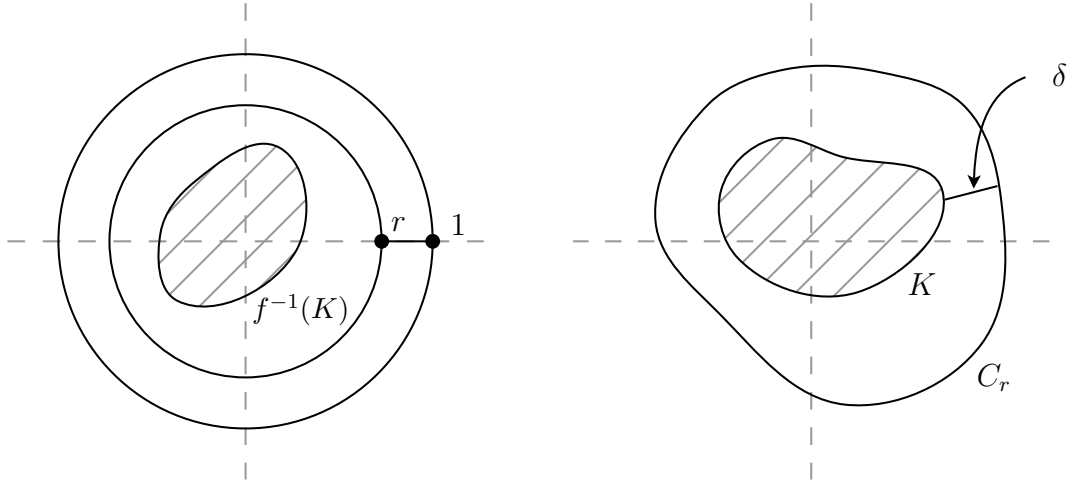


Abbildung 2.10: Disjunktheit und Abstand von K und C_r

Die Mengen K und $C_r = \{f(z) \mid |z| = r\}$ sind disjunkt, denn gäbe es ein $w \in K \cap C_r$, so gäbe es ein $z \in \partial\Delta_r$ mit $f(z) = w$ und ein $v \in f^{-1}(K)$ mit $f(v) = w$. Aufgrund von (2.37) stünde dies im Widerspruch zur Injektivität von f . Als disjunkte Kompakta besitzen K und C_r wiederum einen positiven Abstand (siehe Abbildung 2.10)

$$\delta := \text{dist}(K, C_r) > 0.$$

Da (f_n) auf dem Kompaktum $\partial\Delta_r$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ und für alle $z \in \partial\Delta_r$ gilt

$$|f(z) - f_n(z)| < \delta.$$

Für alle $w \in K$, $z \in \partial\Delta$ und $n \geq N$ folgt

$$|f(z) - w + w - f_n(z)| < \delta = \text{dist}(K, C_r) \leq |f(z) - w|. \quad (2.38)$$

Für festes $w \in K$ folgt also nach dem Satz von Rouché, dass $f(z) - w$ und $f_n(z) - w$ ($n \geq N$) die gleiche Anzahl an Nullstellen in Δ_r besitzen, wegen der Schlichtheit der f_n und f also keine oder genau eine.

Die Funktion $f(z) - w$ besitzt wegen $w \in K \subset f(G)$ die Nullstelle

$$z = f^{-1}(w) \in f^{-1}(K) \stackrel{(2.37)}{\subset} \Delta_r, \quad \text{also} \quad w \in f(\Delta_r),$$

und damit auch $w \in f(\Delta) = G$. Wäre $w \notin f_n(\Delta)$ für ein $n \geq N$, also erst recht $w \neq f_n(z)$ ($\forall z \in \partial\Delta_r$), so wäre in Gleichung (2.38)

$$|w - f_n(f^{-1}(w))| < \delta \leq |f(f^{-1}(w)) - w| = 0,$$

was nicht möglich ist. Also gilt $w \in f_n(\Delta) = G_n$. Da $w \in K$ beliebig war, folgt $K \subseteq G_n$ für alle $n \geq N$.

Schritt 3: Es wird zunächst eine lokale Variante bewiesen.

Es gibt eine Teilfolge $(f_{n_k}^{-1})$ von (f_n^{-1}) , die auf G kompakt gegen f^{-1} konvergiert.

Beweis. Zunächst wird G durch eine aufsteigende Folge von Kompakta K_j ausgeschöpft. Wegen $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{j}{j+1} = 1$ und der Schlichtheit von f kann man

$$K_j = f\left(\overline{\Delta_{\frac{j}{j+1}}}\right) = \overline{f\left(\Delta_{\frac{j}{j+1}}\right)}$$

wählen. Die Folge (f_n^{-1}) ist wegen ihrer Δ -Wertigkeit global beschränkt, besitzt also nach dem Satz von Montel auf den K_j gleichmäßig-konvergente Teilfolgen.

Der Beweis wird nun mit Hilfe eines Diagonalisierungsverfahrens⁷ geführt.

Sei $(f_{n_j(l)}^{-1})$ mit $l \in \mathbb{N}$ eine auf K_j gleichmäßig-konvergente Teilfolge von (f_n^{-1}) , so sei für $K_j \subset K_{j+1}$ die Folge $(f_{n_{j+1}(l)}^{-1})$ als Teilfolge von $(f_{n_j(l)}^{-1})$ gewählt. Die Diagonalfolge $(f_{n_l(l)}^{-1})$ ist dann auf allen K_j für $l \geq j$ erklärt und dort gleichmäßig konvergent gegen ein holomorphes $g : G \rightarrow \Delta$, da die $(K_j)_j$ eine Ausschöpfungsfolge für G bilden.

Konvention 2.9.5:

Um den Schreibaufwand in Grenzen zu halten, wird für die Diagonalfolge $(f_{n_l(l)}^{-1})$ kurzerhand $(f_{n_k}^{-1})$ geschrieben.

⁷Der Diagonalisierungsbeweis folgt der äußerst anschaulichen und durchsichtigen Darstellung in [RS07, S.329f].

Wegen $f \in \mathcal{R}$ gilt $f'(0) > 0$ und daher

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{f'(0)} &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{f'_{n_k}(0)} \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} \frac{1}{f'_{n_k}(\underbrace{f_{n_k}^{-1}(0)}_{=0, \text{ da } f_{n_k} \in \mathcal{R}})} \\ &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} (f_{n_k}^{-1})'(0) = g'(0) \quad \text{nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz.} \end{aligned}$$

Es folgt $g \not\equiv \text{const}$ und somit nach Satz A.1.7 die Schlichtheit von g .

Es verbleibt noch $g = f^{-1}$ zu zeigen. Wegen der Injektivität von g ist also nur noch $g(f(w)) = w$ für alle $w \in \Delta$ zu zeigen.

Sei $w \in \Delta$. Für $\varepsilon > 0$ werde der Kreis $\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ betrachtet, wobei ε so gewählt sei, dass $\partial\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w) \subset \Delta$ gilt. Weiter sei

$$\delta := \min \left\{ |f(z) - f(w)| \mid |z - w| = \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

Da $|f(z) - f(w)|$ (als Funktion in z) stetig auf dem Kompaktum $\partial\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ ist, existiert δ (als Minimum). Es ist dann $\delta > 0$ wegen der Injektivität von f . Es werde ein N so gewählt, dass für alle $n \geq N$ gilt $|f(z) - f_n(z)| < \delta$ für alle z aus $\partial\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$. Dieses ist möglich, da (f_n) kompakt auf Δ gegen f konvergiert.

Für $n \geq N$ und $z \in \partial\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ gilt dann

$$|f(z) - f(w) + f(w) - f_n(z)| < \delta \leq |f(z) - f(w)|.$$

Nach dem Satz von Rouché besitzen dann $|f(z) - f(w)|$ und $|f(w) - f_n(z)|$ in $\Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ die gleiche Anzahl (mit Vielfachheit gerechnet) an Nullstellen. Wegen $f(z) - f(w) = 0$ für $z = w \in \Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ gibt es also ein $z_n \in \Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$ mit $f_n(z_n) = f(w)$.

Bezogen auf die obige Folge $(f_{n_k}^{-1})$ (siehe Konvention 2.9.5) mit $f_{n_k}^{-1} \xrightarrow{\text{kompakt}} g$ heißt das für alle $n_k \geq N$, dass es z_{n_k} gibt mit $f_{n_k}(z_{n_k}) = f(w)$ und folglich

$$f_{n_k}^{-1}(f(w)) = z_{n_k}. \quad (2.39)$$

Wegen $f_{n_k}^{-1} \xrightarrow{\text{kompakt}} g$ gilt für alle hinreichend großen n_k

$$|g(f(w)) - f_{n_k}^{-1}(f(w))| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für diese n_k hat man dann

$$\begin{aligned} |g(f(w)) - w| &\leq |g(f(w) - f_{n_k}^{-1}(f(w)))| + |f_{n_k}^{-1}(f(w)) - w| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + |z_{n_k} - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

wegen $z_{n_k} \in \Delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(w)$.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt somit $g(f(w)) = w$, d.h. $g = f^{-1}$, womit die lokale Version im Schritt 3 bewiesen ist. \square

Nach dieser nützlichen Vorbereitung wird der eigentliche Schritt 3 in Angriff genommen, d.h., der Beweis der Aussage (f_n^{-1}) konvergiert kompakt auf G und $G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$.

Nach der lokalen Version besitzt (f_n^{-1}) eine Teilfolge $(f_{n_k}^{-1})$ die kompakt gegen f^{-1} konvergiert. Die lokale Version lässt sich natürlich *a priori* auf jede Teilfolge $(f_{n_j}^{-1})$ von (f_n^{-1}) anwenden, d.h., es gilt:

Jede Teilfolge $(f_{n_j}^{-1})$ von (f_n^{-1}) besitzt eine gegen f^{-1} kompakt-konvergente Teilfolge $(f_{n_{j_l}}^{-1})$. Im Sinne der Topologie der kompakten Konvergenz ist somit f^{-1} Häufungspunkt der Folge (f_n^{-1}) und wegen dem gerade Dargelegten ist f^{-1} auch der einzige Häufungspunkt von (f_n^{-1}) . Nach Satz A.1.8 ist dann (f_n^{-1}) selbst kompakt konvergent gegen f auf G .

Jedes Kompaktum $K \subset \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ ist in fast allen Mengen G_n enthalten. In Schritt 2 wurde bereits $G \subset \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ bewiesen. Da (f_n^{-1}) punktweise auf G konvergiert und G wegen seiner Offenheit (mindestens) einen Häufungspunkt in G besitzt (Alle $a \in G$ sind natürlich Häufungspunkte von G ; hier kommt es nur auf die Voraussetzungen des Satzes von Vitali an), ist nach Vitali (Satz A.1.6) die Folge (f_n^{-1}) kompakt konvergent auf allen kompakten Teilmengen von $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ gegen ein h .

Auf G selbst gilt natürlich

$$h|_G = f^{-1}. \quad (2.40)$$

Wäre nun $\text{Ker}(G_1, G_2, \dots) \subsetneq G$, so gäbe es ein $z_1 \in \text{Ker}(G_1, G_2, \dots) \setminus G$ und damit wäre $w_1 := h(z_1) \in \Delta$. Wegen $w_1 \in \Delta$ gibt es, da $f^{-1} : G \rightarrow \Delta$ eine Bijektion ist, ein $z_2 \in G$ mit

$$\Delta \ni w_1 = f^{-1}(z_2) \stackrel{(2.40)}{=} h(z_2).$$

Dann gilt aber $h(z_1) = w_1 = h(z_2)$ mit einem $z_1 \in \text{Ker}(G_1, G_2, \dots) \setminus G$ und

einem $z_2 \in G$ im Widerspruch zur Injektivität von h (h ist wegen (2.40) nicht-konstant und kompakter Grenzwert schlichter Funktionen, also injektiv). Es gilt also $G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$.

Damit ist Schritt 3 vollständig bewiesen.

Schritt 4: Es verbleibt noch der Beweis der Äquivalenzaussage im Konvergenztheorem zu erbringen.

Die Bedingungen (i) und (ii) sind notwendig, falls (f_n) kompakt gegen f konvergiert.

Beweis. Aus $f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f$ folgt natürlich auch $f_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} f$ für Teilfolgen (f_{n_k}) von (f_n) und hieraus folgt bereits offensichtlich (i). (ii) gilt wegen (siehe Schritt 3) $G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ und $G = f(\Delta)$, mithin $G \neq \mathbb{C}$ nach dem Riemannschen Abbildungssatz (Theorem A.1.1), da $f \in \mathcal{R}$. \square

Die Bedingungen (i) und (ii) sind hinreichend für die kompakte Konvergenz der f_n .

Beweis. Sei $G := \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$.

Annahme: Die Folge $(f'_n(0))$ ist unbeschränkt, d.h., es gibt zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein n_k mit $|f'_{n_k}(0)| > k$. Nach dem Koebeschen $\frac{1}{4}$ -Satz gilt dann

$$\Delta_{\frac{k}{4}} \subseteq G_{n_k} = f_{n_k}(\Delta).$$

Wegen $G_{n_k} \subset G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ gilt alsdann $\Delta_{\frac{k}{4}} \subset G$ im Widerspruch zu $G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$ und (ii).

Die Folge $(f'_n(0))$ ist also beschränkt, d.h. $|f'_n(0)| \leq M$ für ein $M > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Der Verzerrungssatz liefert nun für $|z| \leq r$ (für $r \in (0, 1)$)

$$|f_n(z)| \leq \frac{Mr}{(1-r)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die $\overline{\Delta_r}$ ($r \in (0, 1)$) eine kompakte Ausschöpfungsfolge für Δ bilden, folgt die lokal-gleichartige Beschränktheit der (f_n) auf Δ . Nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) gibt es also eine kompakt-konvergente Teilfolge f_{n_k} mit einer Grenzfunktion f . Schritt 1 und 2 des Gesamtbeweises liefern zunächst $f \in \mathcal{R}$ und $f(\Delta) = G = \text{Ker}(G_1, G_2, \dots)$. Diese Argumentation hätte man offensichtlich (unter Beachtung der Gültigkeit der Aussage in Satz 2.9.3 (2) (i)) für jede Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) durchführen können.

Die Aussage (i) in Satz 2.9.3 (2) sichert auch (ii) für die Teilfolge, und damit kann man die Schritte 1 und 2 anwenden, wodurch die Existenz von f . Dass die Grenzfunktion wieder f ist, ist aber trivial.

Alsdann: Jede Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) besitzt eine Teilfolge $(f_{n_{k_l}})$, die kompakt gegen f konvergiert.

Im Sinne der Topologie der kompakten Konvergenz ist folglich f der einzige Häufungspunkt von (f_n) , womit gemäß Satz A.1.8 $f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f$ folgt. \square

Damit ist der Carathéodorysche Konvergenzsatz vollständig bewiesen. \square

2.10 Technische Lemmata

In diesem Abschnitt werden vier Lemmata bewiesen, die für den Beweis des Hauptergebnisses, der Parametrisierbarkeit der Löwner-Familien, benötigt werden. Bei den Beweisen kommt ausgiebig der Carathéodorysche Konvergenzsatz zum Einsatz. Desweiteren werden beide Varianten des Montelschen Theorems sowie der Verzerrungssatz benötigt.

Lemma 2.10.1:

Seien $(f_n), (g_n)$ Funktionenfolgen aus \mathcal{R} , $f, g \in \mathcal{R}$ mit

$$f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f \quad \text{und} \quad g_n \xrightarrow{\text{kompakt}} g.$$

Gilt dann $f_n \prec g_n$ für alle $n \geq 1$, so gilt auch $f \prec g$.

Beweis. Seien $f_n = g_n \circ B_n$ für gewisse $B_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ ($n \geq 1$). Wegen $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}$ und \mathcal{B} kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$ (nach Lemma 2.2.11), gibt es eine Teilfolge (B_{n_k}) von (B_n) , die nach der Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel (Theorem A.1.3) kompakt gegen ein $B \in \mathcal{B}$ konvergiert.

Es gilt weiter für $z \in \Delta$

$$\begin{aligned} g(B(z)) - f_{n_k}(z) &= g(B(z)) - g_{n_k}(B_{n_k}(z)) \\ &= [g(B(z)) - g(B_{n_k}(z))] + [g(B_{n_k}(z)) - g_{n_k}(B_{n_k}(z))] \\ &=: \alpha_{n_k} + \beta_{n_k}. \end{aligned}$$

$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k} = 0$ ist klar wegen der Wahl von (B_{n_k}) und der Stetigkeitsvorgabe.

Nach Voraussetzung konvergiert die Folge (g_{n_k}) auf jeder kompakten Kreisscheibe $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq r\}$ ($0 < r < 1$) gleichmäßig gegen g und nach dem Schwarzschen Lemma gilt $|B_{n_k}(w)| \leq |w|$ für alle n_k und alle $w \in \Delta$. Hieraus folgt auch $\lim_{n_k \rightarrow \infty} \beta_{n_k} = 0$. Somit gilt

$$f(z) = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) = g(B(z)) \quad (\forall z \in \Delta).$$

Wegen $f, g \in \mathcal{R}$ hat man also $B = g^{-1} \circ f$ und somit $B(0) = g^{-1}(0) = 0$, sowie

$$B'(0) = (g^{-1})'(f(0))f'(0) = \frac{f'(0)}{g'(f(0))} = \frac{f'(0)}{g'(0)} > 0.$$

Da zudem $B(\Delta) \subset \Delta$ gilt, folgt $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ und alsdann $f \prec g$. □

Lemma 2.10.2:

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ (mit $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) ein Jordanweg mit $0 \notin \Gamma := \text{Bild}(\gamma)$ und $\gamma(1) = \infty$. Für jedes (feste, aber beliebige) $a \in [0, 1]$ sei

$$f(a, z) := f_1(a)z + f_2(a)z^2 + \dots$$

die normalisierte Riemannsche Abbildungsfunktion mit

$$f(a, z)(\Delta) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \gamma([a, 1]) =: G_a.$$

(G_a ist einfach-zusammenhängend nach Satz A.1.10 b).)

Dann gilt:

Die Taylorkoeffizienten $f_j(a)$, aufgefasst als Funktionen in a , sind stetige Funktionen auf $[0, 1)$ und zudem

$$\lim_{a \uparrow 1} f_1(a) \uparrow \infty.$$

D.h., konvergiert eine Folge (a_n) aus $[0, 1)$ streng monoton wachsend gegen 1, so konvergiert $f_1(a_n)$ streng monoton wachsend gegen ∞ .

Dem eigentlichen Beweis von Lemma 2.10.2 wird ein Hilfssatz vorausgestellt.

Hilfssatz 2.10.3:

Sei $G_a = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, 1])$ das Bild von $f(a, z)$ ($a \in [0, 1)$). Weiter seien a_1, a_2, \dots Punkte in $[0, 1)$ mit $a_n \rightarrow a$. Es gilt dann $G_a = \text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots)$.

Beweis.

$$0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{a_n} \text{ ist innerer Punkt,} \quad (2.41)$$

da $0 \notin \Gamma$ gilt und 0 daher wegen der Kompaktheit von Γ einen positiven Randabstand zu $\Gamma = \gamma([0, 1))$ hat. Somit gibt es ein $r > 0$ mit $\Delta_r \cap \Gamma = \emptyset$ und damit

$$\Delta_r \cap \gamma([a, 1)) = \emptyset \quad (\forall a \in [0, 1)).$$

Weiter ist $0 \in G_a$ klar.

Sei nun K ein Kompaktum in $G_a = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \gamma([a, 1)) = \mathbb{C} \setminus \gamma([a, 1))$. Für alle j mit $a_j \geq a$ ist $\mathbb{C} \setminus \gamma([a_j, 1)) \supset \mathbb{C} \setminus \gamma([a, 1))$ und K daher auch eine Teilmenge von G_{a_j} für diese j .

Sei nun $a_j \leq a$ für ein j . Das Kurvenstück $\gamma([a_j, a])$ ist kompakt. Wegen $a_j \rightarrow a$ gibt es ein N , so dass für alle $j \geq N$ gilt $\gamma([a_j, 1)) \subset \gamma([a - \frac{1}{N}, 1))$. Da K und $\gamma([a - \frac{1}{N}, 1))$ kompakt sind und K und $\gamma([a, 1))$ einen positiven Randabstand haben, besitzen auch K und $\gamma([a - \frac{1}{N}, 1))$ für hinreichend großes N ⁸ einen positiven Randabstand. Für alle $j \geq N$ gilt also auch $K \subset G_{a_j}$. Insgesamt ist damit $K \subset G_{a_j}$ für alle bis auf endlich viele Ausnahmen gezeigt, und damit

$$G_a \subset \text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots) =: T.$$

Für Teilfolgen (a_{n_k}) von (a_n) kann man (b_n) für (a_{n_k}) schreiben und erhält wieder $b_n \rightarrow a$, so dass die oben angewandten Schlussweisen wieder Gültigkeit haben.

Damit ist G_a ein Kandidat für $T = \text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots)$ bzw. für $\text{Ker}(G_{a_{n_1}}, G_{a_{n_2}}, \dots)$ für alle Teilfolgen (a_{n_k}) von (a_n) .

Es sei $w \in T \setminus G_a$. Dann liegt w in $\gamma([a, 1))$ und wegen $a_n \rightarrow a$ kann dann das Kompaktum $\{w\} \subset T$ nur in endlich vielen G_{a_j} liegen. Also gilt $T \subset G_a$. $G_a \subset T$ wurde bereits gezeigt. Folglich gilt $G_a = \text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots)$. \square

Nun folgt der eigentliche Beweis von Lemma 2.10.2:

Beweis. Wegen $G_a = \text{Bild}(f(a, z))$ liefert dann der Carathéodorysche Konvergenzsatz

$$f(a_n, z) \xrightarrow{\text{kompakt}} f(a, z) \quad (\text{auf } \Delta).$$

⁸ N hängt von K ab. Da keine impliziten Abhängigkeiten entstehen können, wird auf eine zusätzliche Indizierung verzichtet.

Aus dem Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz [DR72, S.119] folgt für die Taylorkoeffizienten von f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_j(a_n) = f_j(a) \quad (\forall j \in \mathbb{N}). \quad (2.42)$$

Betrachtet man also die Taylorkoeffizienten $f_j(a)$ als Funktion von $a \in [0, 1]$, so folgt aus $a_n \rightarrow a$ und (2.42) sowie dem Folgenkriterium für Stetigkeit die Stetigkeit der $f_j(a)$ für $a \in [0, 1]$ und für alle $j \in \mathbb{N}$.

Setzt man $z = 0$, so erhält man

$$\left. \frac{d}{dz} f(a, z) \right|_{z=0} = f_1(a) > 0. \quad (2.43)$$

Ist $a_1 < a_2$, so gilt offensichtlich $\gamma([a_1, 1)) \supset \gamma([a_2, 1))$, d.h., $\mathbb{C} \setminus \gamma([a_1, 1)) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([a_2, 1))$, d.h., $\text{Bild}(f(a_1, z)) \subset \text{Bild}(f(a_2, z))$.

Nach Lemma 2.3.2 folgt damit $f(a_1, z) \prec f(a_2, z)$ und daher mit (2.43)

$$\left. \frac{d}{dz} f(a_1, z) \right|_{z=0} = f_1(a_1) \leq f_1(a_2) = \left. \frac{d}{dz} f(a_2, z) \right|_{z=0},$$

woraus die steigende Monotonie von $f_1(a)$ folgt.

Es verbleibt noch $f_1(a) \uparrow \infty$ für $a \uparrow 1$ zu zeigen.

Annahme: Die Behauptung ist falsch. Dann gibt es eine Folge (a_n) mit $a_n \in [0, 1)$ und $a_n \uparrow 1$ und $f_1(a_n)$ ist beschränkt, d.h.,

$$\exists M \geq 0 \forall n \geq 1 : f_1(a_n) \leq M.$$

Nach dem Verzerrungssatz 2.8.1 (2.29) ist dann die Funktionenfolge $f(a_k, z)$ wegen

$$\left. \frac{d}{dz} f(a_k, z) \right|_{z=0} = f_1(a_k) \leq M$$

offensichtlich lokal-gleichartig beschränkt auf Δ . Somit existiert nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) eine Teilfolge $f(a_{k_j}, z)$, die kompakt gegen ein $g \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert.

Hieraus ergibt sich mit dem Carathéodoryschen Konvergenzsatz 2.9.3

$$\text{Ker}(G_{a_{n_1}}, G_{a_{n_2}}, \dots) = g(\Delta) \quad \text{mit } g(\Delta) \neq \mathbb{C}.$$

(Um den Konvergenzsatz anwenden zu können, ist noch zu erwähnen, dass 0 innerer

Punkt von $\bigcap_{j=1}^{\infty} G_{a_{n_j}}$ ist, was aber in (2.41) bereits gezeigt wurde.)

Für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{C}$ gibt es $r > 0$ mit $K \subset \Delta_r$. Dann gibt es ein kleinstes n_j mit $n_j > r$ und $\Delta_r \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([a_{n_k}, 1))$. Wegen $a_{n_k} \uparrow 1$ gilt also für alle $n_j > n_k$

$$K \subset \Delta_r \subset \mathbb{C} \setminus \gamma([a_{n_j}, 1)).$$

Daraus folgt aber

$$\text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots) = \mathbb{C} \text{ im Widerspruch zu } \text{Ker}(G_{a_1}, G_{a_2}, \dots) = G(\Delta) \neq \mathbb{C}.$$

Also war die gesamte Annahme falsch, d.h., $f_1(a) \uparrow \infty$ für $a \uparrow 1$. \square

Lemma 2.10.4:

Sei f schlicht in einem Gebiet T mit $T \supset \overline{\Delta}$. Seien $F = f(\partial\Delta)$ und $G = f(\Delta)$.

Ist $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Kurve mit

$$(\gamma(0) \in G, \gamma(1) \notin G) \quad \text{oder} \quad (\gamma(0) \notin G, \gamma(1) \in G),$$

so gilt mit $\Gamma = \text{Bild}(\gamma)$ $\Gamma \cap F \neq \emptyset$.

Beweis. Aus Symmetriegründen genügt es natürlich, nur den Fall $\gamma(0) \in G$ und $\gamma(1) \notin G$ zu betrachten.

Fall 1: $\gamma(1) \in F$. Dann ist nichts zu zeigen.

Fall 2: $\gamma(1) \notin F$.

Annahme: $F \cap \Gamma = \emptyset$. Γ werde mit der Spurtopologie τ von \mathbb{C} versehen, d.h., die offenen Mengen in (Γ, τ) sind die Mengen $U \cap \Gamma$ mit U offen in \mathbb{C} .

Seien $A := \Gamma \cap G$ und $B := \Gamma \setminus (G \cup F)$. Da G offen in \mathbb{C} ist, ist A offen in (Γ, τ) . Weiter ist $G = f(\Delta)$ wegen der Schlichtheit von f und dem Offenheitssatz offen in \mathbb{C} und folglich $G \cup F = f(\partial\Delta \cup \Delta) = f(\overline{\Delta})$ abgeschlossen (sogar kompakt), da $f : \overline{\Delta} \rightarrow f(\overline{\Delta})$ auch homöomorph ist. Alsdann ist auch $\Gamma \setminus (G \cup F)$ offen in (Γ, τ) und somit B offen in (Γ, τ) .

Desweiteren gilt

$$A \cap B = (\Gamma \cap G) \cap ((\Gamma \setminus G) \cap (\Gamma \setminus F)) = \emptyset$$

und $A \cup B \subset \Gamma$ ist trivial.

Sei $w \in \Gamma \setminus (A \cup B)$, dann gilt $w \notin F$, da $\Gamma \cap F = \emptyset$, und $w \notin A$ und somit

$w \notin G$. Also gilt $w \in \Gamma \setminus F$ und $w \in \Gamma \setminus G$, d.h.,

$$w \in (\Gamma \setminus G) \cap (\Gamma \setminus F) = \Gamma \setminus (G \cup F) = B.$$

Dies ist ein Widerspruch. Also gilt $\Gamma \subset A \cup B$. Zusammen mit $A \cup B \subset \Gamma$ folgt also $A \cup B = \Gamma$.

$A \neq \emptyset$ ist klar wegen $\gamma(0) \in A$. $B \neq \emptyset$ ist klar wegen $\gamma(1) \in \Gamma$, wobei $\gamma(1) \notin F$ und $\gamma(1) \notin G$, mithin $\gamma(1) \in (\Gamma \setminus (G \cup F)) \cap \Gamma = B$.

Insgesamt ist also Γ die disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Mengen. Wegen $A \neq \Gamma$ (da $\gamma(1) \notin G$) und $B \neq \Gamma$ (da $\gamma(0) \in G$, also $\gamma(0) \notin \Gamma \setminus (G \cup F)$) folgt, dass Γ nicht zusammenhängend ist. Widerspruch, denn als Bild der stetigen Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ist Γ zusammenhängend. Die Annahme war also falsch. Es gilt daher $F \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Für den Beweis des folgenden Lemmas sind einige Vorbereitungen zu treffen.

Definition 2.10.5:

Für $t \geq 1$ seien

- a) $\mathcal{R}_t := \{f \in \mathcal{O}_s(\Delta_t) \mid f(0) = 0 \text{ und } f'(0) > 0\},$
- b) $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_t} := \{f \in \mathcal{R}_t \mid f(\Delta_t) \subset \Delta_t \text{ und } f(\Delta) \subset \Delta\}.$

Bemerkung 2.10.6:

Im Fall $t = 1$ gelten also $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}$ und $\mathcal{B}_{\mathcal{R}_1} = \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$.

Definition 2.10.7:

Seien $t \geq 1$ und $f, g \in \mathcal{R}_t$.

f heißt g t -untergeordnet (in Zeichen: $f \prec_t g$) $:\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}_t}$ mit $f = g \circ B$.

Bemerkung 2.10.8:

Im Fall $t = 1$ gilt also: $f \prec_1 g \Leftrightarrow f \prec g$.

Hilfssatz 2.10.9:

Seien $t > 1$ und $f, g \in \mathcal{R}_t$ mit $f \neq g$ und $f \prec_t g$. Dann gilt für alle $s \in (0, t)$ (insbesondere also auch für $s = 1$)

$$f(\partial\Delta_s) \cap g(\partial\Delta_s) = \emptyset.$$

Beweis.

Annahme: Es gibt ein $s \in (0, t)$ und ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \in f(\partial\Delta_s) \cap g(\partial\Delta_s)$. Wegen $f \prec_t g$ gilt $f = g \circ B$ für ein $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}_t}$. Es gibt also $v, w \in \partial\Delta_s$ mit

$$f(v) = g(B(v)) = g(w) = z_0. \quad (2.44)$$

Wegen $|B(z)| < t$ und $B \in \mathcal{O}(\Delta_t)$ sowie $B(0) = 0$, folgt nach dem Lemma von Schwarz für beliebige Kreisschreiben (Satz A.1.11)

$$|B(z)| \leq \frac{t}{t} |z| = |z|.$$

Das Gleichheitszeichen kann für kein $z \in \Delta_t$ gelten, da dann nach Satz A.1.11 $B(z) = e^{i\varphi} z$ (für ein $\varphi \in [0, 2\pi)$) gelten würde. Wegen $B'(0) > 0$ (da $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}_t}$) und $\frac{d}{dz} e^{i\varphi} z \Big|_{z=0} = e^{i\varphi}$ wäre nur $\varphi = 0$ möglich, d.h., es wäre $B = \text{id}_{\Delta_t}$. Dieses ist aber unmöglich, da ansonsten $f = g \circ B = g$ im Widerspruch zu $f \neq g$ gelten würde. Folglich gilt

$$|B(z)| < |z| \quad (\forall z \in \Delta_t).$$

Aus (2.44) folgt wegen der Injektivität von g unmittelbar $B(v) = w$. Folglich hat man $|w| = |B(v)| < |v|$ im Widerspruch zu $v, w \in \partial\Delta_s$.

Damit ist der Hilfssatz bewiesen. □

Bemerkung 2.10.10:

Seien $f, g \in \mathcal{O}(\Delta_t)$ mit $t > 1$ und $f \prec_t g$. Dann gilt auch

$$f|_{\Delta} \prec g|_{\Delta}.$$

Lemma 2.10.11:

Seien $f, g \in \mathcal{R}$ mit $f \prec g$ und $c > 0$. Dann gilt

$$f'(0) < c < g'(0) \quad \Rightarrow \quad \exists h \in \mathcal{R} \quad \text{mit} \quad h'(0) = c \quad \text{und} \quad f \prec h \prec g.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in drei Schritten:

Im ersten Schritt wird das Lemma für Funktionen f, g , die sich schlicht in ein Obergebiet von Δ fortsetzen lassen, bewiesen. Im zweiten Schritt werden auf Obergebieten von Δ definierte Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) konstruiert, für die gemäß dem ersten Schritt die Gültigkeit des Lemmas bereits vorausgesetzt werden darf. Diese Folgen besitzen Teilfolgen, die auf Δ kompakt gegen f bzw. g konvergieren. Mittels dieser Teilfolgen wird im dritten Schritt die gesuchte Funktion h aus der Aussage des Lemmas konstruiert.

Als wesentliches Beweishilfsmittel im ersten Schritt, dem Kern des Beweises, dient der Carathéodorysche Konvergenzsatz, während die folgenden beiden Schritte typische Anwendungen des Satzes von Montel sind.

Schritt 1: Es wird angenommen, dass die Funktionen f und g (mit den Eigenschaften $f, g \in \mathcal{R}$, $f \prec g$ und $f'(0) < c < g'(0)$) in einem Kreis Δ_t mit $t > 1$ schlichte Fortsetzungen besitzen. Für diese Fortsetzungen, die ebenfalls mit f und g bezeichnet werden, wird weiter $f \prec_t g$ angenommen. (Für die ursprünglichen Funktionen wird $f|_{\Delta}$ bzw. $g|_{\Delta}$ geschrieben.)

Nun wird gezeigt:

Es gibt eine Funktion $h \in \mathcal{R}$ mit $h'(0) = c$ und $f|_{\Delta} \prec h \prec g|_{\Delta}$.

Beweis. Nach Hilfssatz 2.10.9 gilt

$$\text{dist}(f(\partial\Delta), g(\partial\Delta)) > 0.$$

Wegen $f \prec g \Leftrightarrow f(\Delta) \subset g(\Delta)$ (Lemma 2.3.2) folgt dann aus Stetigkeitsgründen $f(\partial\Delta) \subset g(\Delta)$.

Auf $\partial\Delta$ besitzt $|g|$ ein globales Maximum, z.B. in $e^{i\varphi_0}$, also

$$|g(e^{i\varphi_0})| = \max_{|z| \leq 1} \{|g(z)|\} = \max_{|z|=1} \{|g(z)|\}.$$

Für $n \geq 1$ wird nun der Jordan-Weg $\gamma_n := \gamma_n^{(1)} + \gamma_n^{(2)}$ (siehe Abbildung 2.11)

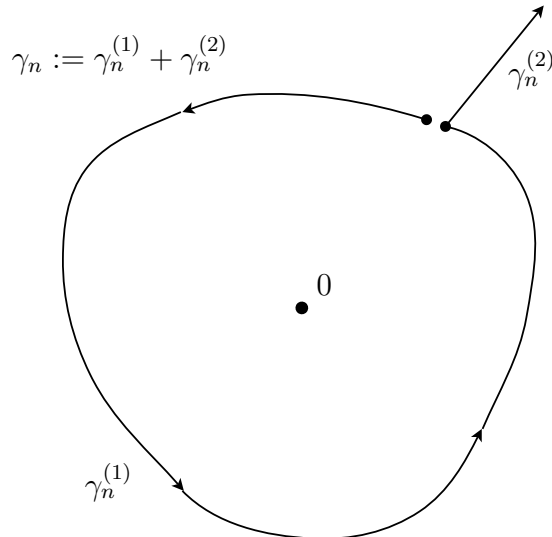


Abbildung 2.11: Veranschaulichung des Jordan-Weges γ_n

betrachtet, wobei gilt

$$\begin{aligned}\gamma_n^{(1)} &: \left[\varphi_0 + \frac{1}{n}, \varphi_0 + 2\pi \right] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto g(e^{i\varphi}) \\ \gamma_n^{(2)} &: [1, \infty] \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}, \varphi \mapsto g(e^{i\varphi_0})\varphi \quad \text{und} \quad \infty \mapsto \infty.\end{aligned}$$

Sei $\varphi_1 \in [0, 2\pi)$ mit $0, f(e^{i\varphi_1})$ und $g(e^{i\varphi_0})$ kollinear. Mit α_n werde der Jordan-Weg

$$\alpha_n : \left[\varphi_1 + \frac{1}{n}, \varphi_1 + 2\pi \right] \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto f(e^{i\varphi})$$

bezeichnet. β_n sei die Strecke (als parametrisierter Weg) von $f(e^{i\varphi_1})$ nach $g\left(e^{i(\varphi_0 + \frac{1}{n})}\right)$.

Da f und g holomorph auf Δ_t sind, kann man n_0 so groß wählen, dass die Bilder $\text{Tr}(\alpha_n)$ und $\text{Tr}(\beta_n)$ von α_n bzw. β_n nur $f(e^{i\varphi_1})$ und die Bilder $\text{Tr}(\beta_n)$ und $\text{Tr}(\gamma_n)$ von β_n bzw. γ_n für alle $n \geq n_0$ nur $g\left(e^{i(\varphi_0 + \frac{1}{n})}\right)$ gemeinsam haben. Dadurch ist

$$\chi_n := \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$$

für alle $n \geq n_0$ ein Jordan-Weg. ($n \geq n_0$ wird fortan stillschweigend vorausgesetzt.) Abbildung 2.12 veranschaulicht die Situation.

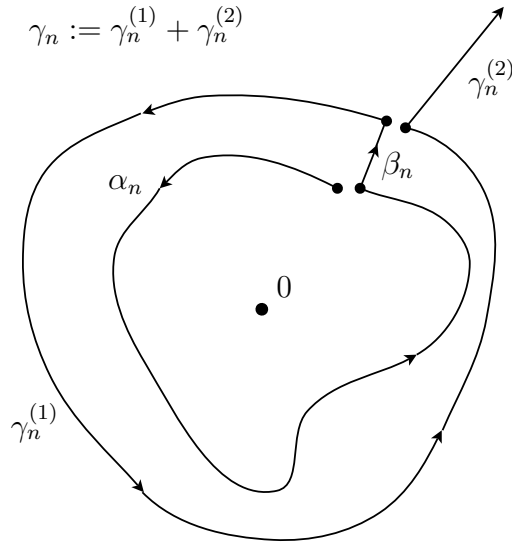


Abbildung 2.12: Veranschaulichung der Jordan-Wege α_n, β_n und γ_n

Da γ_n und χ_n Jordansch sind und somit keine Selbstschnitte haben, sind die Gebiete $G_n := \tilde{\mathbb{C}} \setminus \text{Tr}(\gamma_n)$ und $H_n := \tilde{\mathbb{C}} \setminus \text{Tr}(\chi_n)$ einfach-zusammenhängend.

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz gibt es $g_n \in \mathcal{R}$ mit $g_n(\Delta) = G_n$.

Da 0 in $f(\Delta)$ liegt, ist 0 ein innerer Punkt von $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Wegen

$$G_{n_0} \supset G_{n_0+1} \supset \cdots \supset G_n \supset \cdots$$

hat man für jede Teilfolge (G_{n_k}) von $(G_n)_{n \geq n_0}$

$$T := \text{Ker}(G_{n_0}, G_{n_0+1}, \dots) = \text{Ker}(G_{n_1}, G_{n_2}, \dots, G_{n_k}, \dots). \quad (2.45)$$

(Dies wird bei der baldigen Anwendung des Carathéodoryschen Konvergenzsatzes benutzt.)

Unter Verwendung der Abbildung 2.12 „sieht“ man, dass $T = g(\Delta)$ gilt. Dies wird nun nachfolgend auch formal bewiesen:

Die Inklusionen $g(\Delta) \subset T$ und $g(\Delta) \subsetneq \mathbb{C}$ sind offensichtlich. Es wird nun die Annahme $g(\Delta) \subsetneq T$ zu einem Widerspruch geführt.

Sei $w \in T \setminus g(\Delta)$ (evtl. $w \in g(\partial\Delta)$). Da T zusammenhängend ist und da in \mathbb{C} Zusammenhang und Wegzusammenhang äquivalent sind, gibt es einen Weg $\delta : [0, 1] \rightarrow T$ mit $\delta(0) = 0$ und $\delta(1) = w$. Nach Lemma 2.10.4 gibt es wegen der Schlichtheit von g einen Punkt $\xi \in \delta([0, 1]) \cap g(\partial\Delta)$. Da

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{Tr}(\gamma_n^{(1)}) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \text{Tr}(\gamma_n^{(1)}) = g(\partial\Delta)$$

gilt, kann $\delta([0, 1])$ – und damit auch ξ – nur in endlich vielen G_n enthalten sein. Das ist ein Widerspruch zur Definition von T als Ker in (2.45).

Nach dem Konvergenzsatz von Carathéodory folgt alsdann für eine Teilfolge $(n_k)_k$ von $(n)_{n \geq n_0}$

$$g_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} g$$

und nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz für Ableitungen gilt auch

$$g'_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} g' \quad \text{und insbesondere} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} g'_{n_k}(0) = g'(0).$$

Wegen $c < g'(0)$ gibt es ein $N \geq n_0$ mit $c < g'_{n_k}(0)$ für alle $n_k \geq N$.

Analog findet man Funktionen $f_n \in \mathcal{R}$ mit $f_n(\Delta) = H_n$ für $n \geq n_0$ und eine Teilfolge (m_k) von (n_k) sowie $M \geq N$ mit

$$f_{m_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} f \quad \text{und} \quad f'_{m_k}(0) < c \quad (\forall m_k \geq M).$$

Durch Umnummerieren verfügt man dann über Folgen (f_n) und (g_n) aus \mathcal{R} , die folgende Eigenschaften haben:

$$f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f, \quad g_n \xrightarrow{\text{kompakt}} g, \quad f'_n(0) < c < g'_n(0) \quad (\forall n \geq 1).$$

Nach einer geeigneten Parametertransformation kann man annehmen, dass die Wege χ_n auf $[0, 1)$ definiert sind. Zu jedem $a \in [0, 1)$ gibt es dann nach Lemma 2.10.2 zum Teilweg $\chi_n|_{[a, 1)}$ von χ_n ein $h_n^{(a)} \in \mathcal{R}$ mit

$$\text{Bild}(h_n^{(a)}) = h_n^{(a)}(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \chi_n([a, 1))$$

und

$$h_n^{(a)}(z) = h_{1,n}(a)z + h_{2,n}(a)z^2 + \dots,$$

wobei $h_{1,n}(a) = (h_n^{(a)})'(0)$ stetig auf $[0, 1)$ ist und $(h_n^{(a)})'(0) \uparrow \infty$ für $a \uparrow 1$ gilt.

Es gibt aufgrund der Definition von χ_n ein eindeutig bestimmtes $a_n \in (0, 1)$ mit der Eigenschaft

$$\text{Tr}(\gamma_n) = \chi_n([a_n, 1)).$$

Da g_n und $h_n^{(a_n)}$ (bzw. f_n und $h_n^{(0)}$) beide aus \mathcal{R} sind und Δ auf G_n (bzw. Δ auf H_n) abbilden, sind sie gleich, also $g_n = h_n^{(a_n)}$ (bzw. $f_n = h_n^{(0)}$). Es gilt also für alle $n \geq M$

$$(h_n^{(0)})'(0) = f'_n(0) < c < g'_n(0) = (h_n^{(a_n)})'(0).$$

Nach Lemma 2.10.2 ist $a \mapsto (h_n^{(a)})'(0)$ stetig und streng monoton wachsend. Deshalb gibt es nach dem Zwischenwertsatz (genau!) ein $b_n \in (0, a_n)$ mit $(h_n^{(b_n)})'(0) = c$ für alle $n \geq M$.

Mit $h_n := h_n^{(b_n)}$ hat man alsdann eine Funktion aus \mathcal{R} mit $h'_n(0) = c$ gefunden, welche bezüglich des Teilweges $\eta_n := \chi_n|_{[b_n, 1)}$ der Aussage in Lemma 2.10.2 genügt. Insbesondere gilt also

$$h_n(\Delta) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \chi_n([b_n, 1)) = \tilde{\mathbb{C}} \setminus \eta_n.$$

Wegen $\text{Tr}(\chi_n) \supset \text{Tr}(\eta_n) \supset \text{Tr}(\gamma_n)$ folgt $f_n(\Delta) \subset h_n(\Delta) \subset g_n(\Delta)$, d.h., nach Lemma 2.3.2

$$f_n \prec h_n \prec g_n.$$

Ist $K \subset \Delta$ ein Kompaktum, so gibt es ein $r \in (0, 1)$ mit $K \subset \overline{\Delta_r}$. Nach dem

Verzerrungssatz 2.8.1 hat man für alle $s \leq r$ und alle z mit $|z| = s$

$$\frac{|h_n(z)|}{h'_n(0)} = \frac{|h_n(z)|}{c} \leq \frac{s}{(1-s)^2} \leq \frac{r}{(1-r)^2},$$

weil die Funktion $[0, r] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$ streng monoton wachsend ist, da ihre Ableitung $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ – also positiv – ist. Damit gilt

$$|h_n(w)| \leq c \cdot \frac{r}{(1-r)^2} \quad \forall w \in K,$$

d.h., (h_n) ist lokal-gleichartig beschränkt auf Δ . Nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) gibt es eine Teilfolge (h_{n_k}) von (h_n) , die kompakt gegen ein $h \in \mathcal{O}(\Delta)$ konvergiert. Es gilt $h(0) = 0$ und $h'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} h'_n(0) = c$, die Funktion h ist also aus \mathcal{R} . Aus $f_{n_k} \prec h_{n_k} \prec g_{n_k}$ folgt (wegen der kompakten Konvergenz und Lemma 2.10.1) $f \prec h \prec g$. \square

Schritt 2: Es wird gezeigt:

Seien f, g aus \mathcal{R} mit $f \prec g$ und $f'(0) < c < g'(0)$. Es gibt zu jeder gegen 1 streng monoton fallenden Folge (t_n) Funktionenfolgen (f_n) und (g_n) mit

$$f_n, g_n \in \mathcal{R}_{t_n}, \quad f_n \prec_{t_n} g_n \quad \text{und} \quad f_n \xrightarrow[\text{kompakt}]{} f \quad \text{sowie} \quad g_n \xrightarrow[\text{kompakt}]{} g.$$

Beweis. Aus $f'(0) < c < g'(0)$ folgt $f \neq g$. Wegen $f \prec g$ gibt es ein $B \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ mit $f = g \circ B$. Seien $f_n, g_n : \Delta_{t_n} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f_n(z) := f\left(\frac{z}{t_n}\right) \quad \text{und} \quad g_n(z) := g\left(\frac{z}{t_n}\right).$$

Es ist klar, dass $f_n, g_n \in \mathcal{O}_s(\Delta_{t_n})$ und desweiteren $f_n(0) = 0 = g_n(0)$ sowie $f'_n(0) = \frac{1}{t_n} f'(0) > 0$ und $g'_n(0) = \frac{1}{t_n} g'(0) > 0$ gilt. Also gilt $f_n, g_n \in \mathcal{R}_{t_n}$.

Sei nun $C_n : \Delta_{t_n} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $C_n(z) := t_n \cdot B\left(\frac{z}{t_n}\right)$.

Aus $C_n(0) = t_n \cdot B(0) = 0$ und $C'_n(z) = t_n \cdot \frac{1}{t_n} \cdot B'\left(\frac{z}{t_n}\right)$ folgt

$$C'_n(0) > 0 \quad \text{und}$$

$$C_n(\Delta_{t_n}) \subseteq t_n \cdot B\left(\frac{1}{t_n} \cdot \Delta_{t_n}\right) = t_n \cdot B(\Delta_1) \subset t_n \cdot \Delta_1 = \Delta_{t_n} \quad \text{sowie}$$

$$C_n(\Delta) \subseteq t_n \cdot B\left(\frac{\Delta}{t_n}\right) \underset{(*)}{\subset} t_n \cdot \Delta_{\frac{1}{t_n}} = \Delta_1$$

((*) wegen des Schwarzschen Lemmas). Also gilt $C_n \in \mathcal{B}_{\mathcal{R}_{t_n}}$.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} f_n(z) &= f\left(\frac{z}{t_n}\right) = (g \circ B)\left(\frac{z}{t_n}\right) = g\left(B\left(\frac{z}{t_n}\right)\right) \\ &= g_n\left(t_n B\left(\frac{z}{t_n}\right)\right) = g_n(C_n(z)) = (g_n \circ C_n)(z). \end{aligned}$$

Also gilt

$$f_n \prec_{t_n} g_n.$$

Ist $K \subset \triangle$ ein Kompaktum, so gibt es ein $r \in (0, 1)$ mit $K \subset \overline{\triangle_r}$. Für jedes $n \geq 1$ und $z \in K$ gilt $\frac{z}{t_n} \in \overline{\triangle_r}$ und damit

$$|f_n(z)| = \left| f\left(\frac{z}{t_n}\right) \right| \leq \|f\|_{\overline{\triangle_r}} \quad \text{sowie} \quad |g_n(z)| \leq \|g\|_{\overline{\triangle_r}}.$$

Dann gibt es nach dem Satz von Montel eine Teilfolge $(n_k) \subset \mathbb{N}$, so dass beide Folgen (f_{n_k}) und (g_{n_k}) kompakt auf \triangle konvergieren.

Wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(z) = f(z)$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} g_{n_k}(z) = g(z)$ folgt

$$\left(f_{n_k}|_{\triangle}\right) \xrightarrow{\text{kompakt}} f \quad \text{und} \quad \left(g_{n_k}|_{\triangle}\right) \xrightarrow{\text{kompakt}} g.$$

Damit ist Schritt 2 vollzogen. □

Schritt 3: Seien f, g und $c > 0$ wie in Schritt 2 definiert. Dann existieren für jede streng monoton fallende Folge (t_n) mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = 1$ die Folgen (f_n) und (g_n) wie in Schritt 2. Nach Schritt 1 existiert $h_n \in \mathcal{R}$ mit $h'_n(0) = c$ und $f_n|_{\triangle} \prec h_n \prec g_n|_{\triangle}$. Es wird nun mit dem Verzerrungssatz (genau wie in Schritt 1) gezeigt, dass wegen $h'_n(0) = c$ die Folge (h_n) lokal-gleichartig beschränkt auf \triangle ist. Dann folgt nach dem Satz von Montel die Existenz einer kompakt konvergenten Teilfolge (h_{n_k}) auf \triangle . Wegen $h_{n_k}(0) = 0$ und $h'_{n_k}(0) = c$ ist die Grenzfunktion h dieser Folge aus \mathcal{R} und es gilt $h'(0) = c$.

Aus $f_{n_k}|_{\triangle} \prec h_{n_k} \prec g_{n_k}|_{\triangle}$ sowie

$$\left(f_{n_k}|_{\triangle}\right) \xrightarrow{\text{kompakt}} f \quad \text{und} \quad \left(g_{n_k}|_{\triangle}\right) \xrightarrow{\text{kompakt}} g$$

folgt nach Lemma 2.10.1 die Behauptung

$$f \prec h \prec g \quad \text{und} \quad h'(0) = c.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. □

Korollar 2.10.12:

Sei $f \in \mathcal{R}$ und $c > 0$. Dann gilt

$$f'(0) < c \Rightarrow \exists h \in \mathcal{R} \quad \text{mit} \quad h'(0) = c \quad \text{und} \quad f \prec h.$$

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{R}$ gilt $f'(0) > 0$. Seien $t > c$ und

$$g(z) := f\left(\frac{t}{f'(0)}z\right).$$

Dann gilt

$$g'(0) = \frac{tf'(0)}{f'(0)} = t, \quad \text{d.h.,} \quad f'(0) < c < t = g'(0).$$

Es ist

$$\frac{f'(0)}{t} < 1, \quad \text{also offensichtlich} \quad B := \frac{f'(0)}{t} \text{id}_\Delta \in \mathcal{B}.$$

$B \in \mathcal{R}$ ist trivial. Mithin gilt $B \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ und

$$g(B(z)) = f\left(\frac{t}{f'(0)} \cdot \frac{f'(0)}{t} \cdot z\right) = f(z),$$

d.h., $f \prec g$. Somit folgt die Aussage des Korollars unmittelbar aus Lemma 2.10.11. □

Korollar 2.10.13:

Sei $g \in \mathcal{R}$ und $c > 0$. Dann gilt

$$c < g'(0) \Rightarrow \exists h \in \mathcal{R} \quad \text{mit} \quad h'(0) = c \quad \text{und} \quad h \prec g.$$

Beweis. Es gibt ein $t \in (0, 1)$ mit

$$tg'(0) < c < g'(0).$$

Mit $f(z) = g(tz)$ gilt also

$$f'(0) = tg'(0) < c < g'(0).$$

Für alle $t \in (0, 1)$ gilt offensichtlich $t \text{id}_\Delta \in \mathcal{B}_\mathcal{R}$ und folglich $f \prec g$ nach Definition. Damit folgt die Aussage des Korollars ebenfalls unmittelbar aus Lemma 2.10.11. □

2.11 Parameterdarstellung der Löwner-Familien

Es wird nun das Hauptergebnis, die Parametrisierbarkeit der Löwner-Familien hergeleitet.

Satz 2.11.1 (Parametrisierbarkeit der Löwner-Familien):

Es gilt:

(1) *Sei \mathcal{L} eine Löwner-Familie. Dann ist die Abbildung*

$$L : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^+, f \mapsto f'(0)$$

wohldefiniert und bijektiv.

(2) *Die Umkehrabbildung L^{-1} liefert dann eine Parameterdarstellung von \mathcal{L} mit*

$$\mathcal{L} = \{f(t, z)\}_{0 < t < \infty} \quad \text{und} \\ f(t, z) = tz + f_2(t)z^2 + f_3(t)z^3 + \dots \quad (0 < t < \infty)$$

mit Funktionen $f_j : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ ($\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$)

(die Funktionen f_j sind im übrigen allesamt absolut-stetig (siehe Definition A.2.5) auf \mathbb{R}^+ , insbesondere sind sie also bis auf eine Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{R}^+ differenzierbar (Bemerkung A.2.6); ist $z_0 \in \Delta$ fest gewählt, so ist auch die Funktion $f(t, z_0)$ absolut-stetig auf \mathbb{R}^+ [RR94, S.188, Theorem A (i)]),

(3) *weiter gilt für $0 < a \leq b < \infty$*

$$f(a, z) \prec f(b, z).$$

(Der Koeffizient t von z in $f(t, z)$ rührt daher, dass $\frac{\partial}{\partial z} f(t, z)|_{z=0} = t$ gilt, da die erste Ableitung von f an der Stelle 0 gerade der Koeffizient von z ist.)

Beweis.

Zu (1):

L ist wohldefiniert, da $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ gilt und somit für jedes $f \in \mathcal{L}$ gilt $f'(0) > 0$. Die Injektivität von L ist wegen Lemma 2.3.2 trivial. Es seien $P_{\mathcal{L}} := L(\mathcal{L})$ und (a_n) eine Folge in $P_{\mathcal{L}}$, die gegen ein $a \in \mathbb{R}^+$ konvergiert. Wegen $P_{\mathcal{L}} = L(\mathcal{L})$ gibt es dann $f_n \in \mathcal{L}$ mit $a_n = f'_n(0)$. Da $f'_n(0) = a_n$ als konvergente Folge beschränkt ist, gibt es ein $M > 0$ mit $f'_n(0) < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Verzerrungssatz 2.8.1 gilt für alle $r \in (0, 1)$ mit $|z| = r$

$$|f_n(z)| \leq f'_n(0) \frac{r}{(1-r)^2} \leq \frac{Mr}{(1-r)^2}. \quad (2.46)$$

Sei $K \subset \Delta$ ein Kompaktum. Dann gibt es ein $R \in (0, 1)$ mit $K \subset \overline{\Delta_R} \subset \Delta$. Wegen $R < 1$ folgt aus (2.46), dass (f_n) lokal-gleichartig beschränkt auf Δ ist. Nach dem Satz von Montel (Theorem A.1.2) folgt daraus die Normalität der Familie $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$. Es gibt also eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) , die gegen ein $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ kompakt konvergiert. Nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz für Ableitungen gilt dann

$$f'_{n_k} \xrightarrow{\text{kompakt}} f' \quad \text{und also} \quad (f'_{n_k}(0)) \longrightarrow f'(0) = a,$$

d.h., $a \in P_{\mathcal{L}}$. Damit ist $P_{\mathcal{L}}$ abgeschlossen bzgl. der von \mathbb{R} auf $\mathbb{R}^+ (= (0, \infty))$ induzierten Spurtopologie, d.h., $P_{\mathcal{L}} = A \cap \mathbb{R}^+$ mit einem abgeschlossenen $A \subset \mathbb{R}$.

Es wird nun weiter $f \in \mathcal{L}$ für den obigen kompakten Grenzwert f von (f_{n_k}) gezeigt.

Wegen $f'(0) > 0$ ist f nicht konstant und somit wegen der Schlichtheit der f_{n_k} nach Satz A.1.7 selbst schlicht.

Wegen $\mathcal{L} \subset \mathcal{R}$ gilt $f_{n_k}(0) = 0$ für alle n_k und somit auch $f(0) = 0$.

Da Löwner-Familien (maximale) Ketten bzgl. \prec sind, gibt es zu beliebigem $g \in \mathcal{L}$ unendlich viele f_{n_k} mit $g \prec f_{n_k}$ oder unendlich viele f_{n_k} mit $f_{n_k} \prec g$.

Sind zunächst unendlich viele f_{n_k} gegeben mit $g \prec f_{n_k}$, so betrachte man in Lemma 2.10.1 die konstante Folge g_{n_k} mit $g_{n_k} := g$ ($\forall n_k$). Lemma 2.10.1 liefert dann $f \prec g$.

Analog schließt man in dem Fall, dass für unendlich viele f_{n_k} gilt $f_{n_k} \prec g$, auf $g \prec f$. f ist also bzgl. \prec mit jedem $g \in \mathcal{L}$ aus vergleichbar, woraus $f \in \mathcal{L}$ folgt, da \mathcal{L} eine maximale Kette bzgl. \prec bildet.

Wegen $P_{\mathcal{L}} = A \cap \mathbb{R}^+$ mit abgeschlossenem $A \subset \mathbb{R}$ ist

$$\mathbb{R}^+ \setminus P_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^+ \setminus (A \cap \mathbb{R}^+) = (\mathbb{R}^+ \setminus A) \cup (\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+ \setminus A$$

offen (unter Beachtung, dass nachwievor \mathbb{R}^+ mit der von \mathbb{R} induzierten Spurtopologie betrachtet wird).

Ist $\mathbb{R}^+ \setminus P_{\mathcal{L}} = \emptyset$, so ist die Bijektivität von L bereits bewiesen. Ansonsten ist $\mathbb{R}^+ \setminus P_{\mathcal{L}}$ eine nicht-leere offene Menge.

Ist nun $c \in \mathbb{R}^+$ mit $f'(0) \neq c$ ($\forall f \in \mathcal{L}$), so können genau drei Fälle eintreten:

- (1) $f'(0) < c$ ($\forall f \in \mathcal{L}$) oder
- (2) $f'(0) < c < g'(0)$ mit $\{f \in \mathcal{L} \mid f'(0) < c\} \cup \{g \in \mathcal{L} \mid g'(0) > c\} = \mathcal{L}$ oder
- (3) $c < g'(0)$ ($\forall g \in \mathcal{L}$).

Dann gibt es aber nach Korollar 2.10.12, Lemma 2.10.11 und Korollar 2.10.13 ein $h \in \mathcal{R}$ mit

$$\begin{aligned} h'(0) = c \quad \text{und} \quad f \prec h & \quad \text{im Fall (1) bzw.} \\ h'(0) = c \quad \text{und} \quad f \prec h \prec g & \quad \text{im Fall (2) bzw.} \\ h'(0) = c \quad \text{und} \quad h \prec g & \quad \text{im Fall (3).} \end{aligned}$$

In jedem Fall wäre also h mit jedem Element aus \mathcal{L} bzgl. \prec vergleichbar, d.h., $h \in \mathcal{L}$ im Widerspruch zu $h'(0) = c$ und damit zur Maximalität von \mathcal{L} , womit auch die Surjektivität von \mathcal{L} bewiesen ist.

Zu (2):

(2) folgt natürlich sofort aus (1).

Zu (3):

Sei $0 < a \leq b < \infty$. Nach (2) gibt es also Funktionen $f(a, z)$ und $f(b, z)$ aus \mathcal{L} mit

$$\left. \frac{d}{dz} f(a, z) \right|_{z=0} = a \leq b = \left. \frac{d}{dz} f(b, z) \right|_{z=0},$$

d.h. aber nach Lemma 2.3.2

$$f(a, z) \prec f(b, z).$$

□

Korollar 2.11.2:

Keine Löwner-Familie \mathcal{L} ist kompakt in $\mathcal{O}(\Delta)$.

Beweis. $\mathcal{O}(\Delta)$ sei mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Die Abbildung $L : \mathcal{L} \ni f \mapsto f'(0)$ ist stetig, denn konvergiert eine Folge (f_n) aus \mathcal{L} bzgl. der Topologie der kompakten Konvergenz gegen f (d.h., mit Satz A.1.5

$f_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f$), folgt nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz für Ableitungen $f'_n \xrightarrow{\text{kompakt}} f'$, also

$$L(f_n) = f'_n(0) \rightarrow f'(0) = L(f),$$

d.h., L ist stetig.

Wäre \mathcal{L} kompakt, so auch $L(\mathcal{L}) = \mathbb{R}^+$. Widerspruch.

□

Die Tatsache, dass keine Löwner-Familie kompakt ist, erklärt auch, warum die Löwner-Familien nicht in dem Familiendiagramm auf Seite iv erscheinen. Da alle innerhalb \mathcal{S} (einschließlich) erscheinenden Familien kompakt sind, bestehen zwischen diesen Familien und den Löwner-Familien keine Inklusionsbeziehungen.

Mittels der wohlbekannten Tatsache, dass für eine normale Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(\Delta)$ auch die Familien $\mathcal{F}^{(k)} := \{f^{(k)} \mid f \in \mathcal{F}\}$ normal sind, lässt sich sogar zeigen:

Korollar 2.11.3:

Keine Löwner-Familie \mathcal{L} ist normal.

Beweis.

Annahme: $\mathcal{L} = \{f(t, z)\}_{0 < t < \infty}$ mit $f(t, z) = tz + f_2(t)z^2 + f_3(t)z^3 + \dots$ ist normal. Dann ist auch $\mathcal{L}' = \{t + 2f_2(t)z + 3f_3(t)z^2 + \dots\}_{0 < t < \infty}$ normal. Offenbar ist \mathcal{L}' auf keinem den Nullpunkt enthaltenden Kompaktum gleichartig beschränkt und somit nach dem Satz von Montel auch nicht normal. Widerspruch! \square

Die Nicht-Normalität aller Löwner-Familien hat in Verbindung mit dem Montelschen Fundamentalkriterium (Satz A.1.12) folgende Konsequenz:

Korollar 2.11.4:

Es sei \mathcal{L} eine Löwner-Familie. Zu je zwei verschiedenen komplexen Zahlen a, b gibt es ein $f \in \mathcal{L}$, das mindestens eine der beiden Zahlen a, b als Wert annimmt.

Beweis. Ansonsten wäre nach dem Montelschen Fundamentalkriterium \mathcal{L} normal. Widerspruch. \square

Im Vergleich zu anderen bedeutenden Familien schlichter Funktionen wie z.B. \mathcal{S} , \mathcal{CC} , \mathcal{S}^* und \mathcal{K} weisen Löwner-Familien also erheblich abweichende Eigenschaften auf.

2.12 Konstruktion von Löwner-Familien

Abschließend soll noch kurz auf die Frage eingegangen werden, wie sich Löwner-Familien explizit angeben lassen. Es wird im Folgenden nichts bewiesen, da die bisher entwickelten Hilfsmittel für Beweise nicht hinreichend sind.

Jede Funktion $f \in \mathcal{R}$ ist in einer Löwner-Familie enthalten (siehe Satz 2.3.6). Daher gilt:

Korollar 2.12.1:

$$\mathcal{R} = \bigcup_{\substack{\mathcal{L} \text{ ist} \\ \text{Löwner-Familie}}} \mathcal{L}.$$

Aus dem Korollar ergibt sich aber kein Konstruktionsverfahren für eine Löwner-Familie. Erst die Löwnersche Differentialgleichung

$$t \frac{\partial}{\partial t} f(t, z) = \varphi(t, z) \cdot z \cdot \frac{\partial}{\partial z} f(t, z), \quad (2.47)$$

die ja bereits im Abschnitt 2.2 als eine charakterisierende Eigenschaft der Löwner-Familien erwähnt wurde (siehe Gleichung (2.9)), erlaubt (unter Verwendung von Techniken aus der Theorie der partiellen komplexen Differentialgleichungen) die Konstruktion einer Löwner-Familie, die f enthält.

Nachfolgend wird aufgezeigt, dass die Löwner-Familien vermittels der Löwnerschen Differentialgleichung in bijektiver Beziehung zu den Herglotz-Familien stehen (und dass sich Herglotz-Familien recht einfach konstruieren lassen).

Definition 2.12.2 ([RR94, S.193]):

$\varphi \in \mathcal{O}(\Delta)$ heisst Herglotz-Funktion, wenn gilt

$$\operatorname{Re} \varphi \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(0) = 1.$$

Jede Carathéodory-Funktion $\varphi \in \mathcal{P}$ ist also eine Herglotz-Funktion.

Satz 2.12.3 ([RR94, S.193]):

Jede Herglotz-Funktion φ besitzt eine Darstellung

$$\varphi(z) = \int_{\partial \Delta} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} d\mu(\zeta) \quad (\forall z \in \Delta),$$

wobei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Δ ist.

Definition 2.12.4:

Eine Herglotz-Familie ist eine Menge von Funktionen $\varphi(t, z) := \varphi_t(z)$ ($t \in \mathbb{R}^+$) von Herglotz-Funktionen, so dass für jedes fest gewählte $z \in \Delta$ die Funktion $\varphi(t, z)$ eine Lebesgue-messbare Funktion auf \mathbb{R}^+ ist.

Lemma 2.12.5 ([RR94, S.193]):

In der Taylor-Entwicklung der Funktionen $\varphi_t(z)$ ($t \in \mathbb{R}^+$) einer Herglotz-Familie

$$\varphi_t(z) = 1 + \varphi_1(t)z + \varphi_2(t)z^2 \cdots$$

sind die Koeffizienten $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$ Lebesgue-messbare Funktionen auf \mathbb{R}^+ .

Es gilt nun das

Theorem 2.12.6 ([RR94, S.195, S.205]):

- a) Ist $\mathcal{L} = \{f(t, z)\}_{0 < t < \infty}$ eine Löwner-Familie, so existiert genau eine Herglotz-Familie $\mathcal{H} = \{\varphi(t, z)\}_{0 < t < \infty}$, so dass die Löwnersche Differentialgleichung (2.47) bis auf eine Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{R}^+ gilt.
- b) Ist umgekehrt $\mathcal{H} = \{\varphi(t, z)\}_{0 < t < \infty}$ eine Herglotz-Familie, so existiert genau eine Löwner-Familie $\mathcal{L} = \{f(t, z)\}_{0 < t < \infty}$, so dass die Löwnersche Differentialgleichung (2.47) bis auf eine Lebesgue-Nullmenge in \mathbb{R}^+ gilt.

Herglotz-Familien lassen sich leicht konstruieren. Wie bereits erwähnt, ist jede Carathéodory-Funktion g eine Herglotz-Funktion. Jedes $g \in \mathcal{P}$ lässt sich darstellen in der Form

$$g(z) = \frac{1 + B(z)}{1 - B(z)}$$

mit einem $B \in \mathcal{B}$, d.h., B ist eine Schwarz-Funktion (siehe [DD04, KE2, 2.2.8]). Insbesondere gilt also $|B(z)| < 1$ ($\forall z \in \Delta$) und somit gilt

$$\frac{1 + B(z)}{1 - B(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(B(z))^n.$$

Betrachtet man nun Lebesgue-meßbare reelle Funktionen h auf \mathbb{R}^+ mit $|h(t)| \leq 1$, (z.B. $h(t) = \frac{2}{\pi} \arctan t$, $h(t) = \sin t$ oder $h(t) = \frac{1}{\cosh t}$) sowie ein festes $B \in \mathcal{B}$, dann sind offensichtlich für alle $t \in \mathbb{R}^+$ alle B_t mit $B_t(z) = B(h(t)z)$ aus \mathcal{B} . Folglich sind sämtliche Funktionen

$$g_t(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(B(h(t)z))^n$$

Carathéodory- und somit Herglotz-Funktionen.

Da die Lebesgue-meßbaren Funktionen einen Ring bilden, ergeben sich (durch Sammeln nach Potenzen z^n von $(B(h(t)z))^n$) offensichtlich als Koeffizienten der Taylorreihe von $g_t(z)$ Lebesgue-meßbare Funktionen in $t \in \mathbb{R}^+$. Damit sind konkrete Herglotz-Familien konstruiert. Die Bestimmung der eindeutig bestimmten zugehörigen Löwner-Familie erfolgt nun durch das Lösen der Löwnerschen Differentialgleichung.

Aufgrund dessen, dass es überabzählbar viele Lebesgue-meßbare Funktionen h auf \mathbb{R}^+ mit $|h(t)| \leq 1$ gibt und dass zwischen den Herglotz-Familien und den Löwner-Familien eine bijektive Beziehung besteht, gibt es also auch überabzählbar viele Löwner-Familien.

A Grundlegende Sätze

In diesem Anhang sind einige grundlegende Resultate (ohne Beweise) aus der Funktionentheorie, der Analysis und der Funktionalanalysis zusammengestellt, auf die in der vorliegenden Arbeit zurückgegriffen wird.

A.1 Funktionentheorie

Theorem A.1.1 (Riemannscher Abbildungssatz):

Sei $G \neq \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} und $z_0 \in G$ ein Punkt. Dann gibt es genau eine in G holomorphe Funktion $h \in \mathcal{O}(G)$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) > 0$ (Normierung)
2. h bildet G biholomorph auf \triangle ab.

Theorem A.1.2 (Satz von Montel):

Jede in einem Bereich $B \subset \mathbb{C}$ definierte Familie holomorpher Funktionen $B \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann normal (d.h., jede Funktionenfolge (f_n) aus \mathcal{F} besitzt eine kompakt-konvergente Teilfolge), wenn \mathcal{F} lokal-gleichartig beschränkt ist.

Für Kompaktheitsargumente bei Familien holomorpher Funktionen wird gelegentlich die „Heine-Borel“-Variante der obigen „Bolzano-Weierstraß“-Variante des Satzes von Montel benötigt:

Theorem A.1.3 (Kompaktheitsvariante des Satzes von Montel [DR72, S.226]):

Eine Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ (U offen in \mathbb{C}) ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Dabei ist $\mathcal{O}(U)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen.

Bemerkung A.1.4:

Das Theorem A.1.3 ist so formuliert, dass es ein genaues Abbild des Heine-Borel-schen Satzes darstellt. Mit beschränkt ist natürlich lokal-gleichartig beschränkt gemeint. Das ergibt sich auch unmittelbar aus [DR72, S.225, Satz 12].

Für den Nachweis der Konvergenz einer Funktionenfolge aus der Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(U)$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz ist das folgende Kriterium nützlich:

Satz A.1.5 ([DR72, S.217]):

Eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{C}(U)$ konvergiert genau dann gegen ein $f \in \mathcal{C}(U)$ bezüglich der Topologie der kompakten Konvergenz, wenn (f_n) kompakt gegen f konvergiert.

Aufgrund des Weierstraßschen Konvergenzsatzes kann im vorstehenden Satz $\mathcal{C}(U)$ durch $\mathcal{O}(U)$ ersetzt werden.

Satz A.1.6 (Satz von Vitali[DR72, S.228]):

Eine lokal-gleichartig beschränkte Familie $\{f_n | f_n \in \mathcal{O}(U)\}$ konvergiert kompakt in U , wenn es eine Menge $M \subset U$ mit mindestens einem Häufungspunkt in G gibt, so dass für jedes $z \in M$ die Folge $(f_n(z))_n$ konvergiert.

Satz A.1.7 ([DR72, S.215]):

(f_n) sei eine Folge schlichter Funktionen auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, die kompakt gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, wobei f nicht konstant auf G ist. Dann ist f ebenfalls schlicht.

Satz A.1.8 ([DR72, S.227]):

Sei U offen in \mathbb{C} und $A \subset \mathcal{O}(U)$. Eine Folge (f_n) aus A ist genau dann kompakt konvergent gegen f , wenn f der einzige Häufungspunkt von (f_n) ist. Dabei sei $\mathcal{O}(U)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen.

Satz A.1.9 ([For77, S.3 u. S.16]):

Auf der um ein Symbol ∞ erweiterten komplexen Ebene $\tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lässt sich wie folgt eine Topologie einführen. Die offenen Mengen seien einerseits die üblichen offenen Mengen $U \subset \mathbb{C}$ und andererseits die Mengen der Gestalt $V + \{\infty\}$, wobei $V \subset \mathbb{C}$ das Komplement einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{C}$ ist. Dadurch wird $\tilde{\mathbb{C}}$ zu einem kompakten, einfach-zusammenhängenden Hausdorff-Raum, der zur Riemannschen Zahlenkugel S^2 homöomorph ist.

Satz A.1.10 ([RR94, S.176]):

Es gilt:

a) Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) G ist einfach-zusammenhängend,
- (ii) $\tilde{\mathbb{C}} \setminus G$ ist zusammenhängend in $\tilde{\mathbb{C}}$,
- (iii) Für jedes $f \in \mathcal{O}(G)$, das nirgends auf G verschwindet, existiert ein holomorpher Logarithmus $\log f$ von f ,
- (iv) Zu jedem $g \in \mathcal{O}(G)$ gibt es eine Polynomfolge (p_n) aus $\mathcal{O}(G)$, die kompakt gegen g konvergiert.

b) Versteht man unter einem Jordan-Weg in $\tilde{\mathbb{C}}$ eine stetige injektive Abbildung

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

so gilt für jeden solchen Weg mit $\gamma(1) = \infty$:

$$G := \tilde{\mathbb{C}} \setminus \gamma([0, 1]) \text{ ist einfach zusammenhängend.}$$

Satz A.1.11 (Lemma von Schwarz für beliebige Kreisscheiben [Lan93, S.210f]):

Sei $f \in \mathcal{O}(\Delta_R)$ mit $|f(z)| \leq M$ und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R},$$

wobei das Gleichheitszeichen genau dann gilt, wenn

$$f(z) = \frac{M}{R} e^{i\varphi} z$$

gilt mit einem $\varphi \in \mathbb{R}$.

Satz A.1.12 (Montelsches Fundamentalkriterium [Mon74, S.61]):

Seien $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq b$ und $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Jede Familie $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(G)$ mit $\{a, b\} \cap f(G) = \emptyset$ ($\forall f \in \mathcal{F}$) ist normal.

A.2 Analysis und Funktionalanalysis

Satz A.2.1 (Satz von Stokes [RR94, S.155]):

Es sei γ eine einfach-geschlossene Kurve mit Innerem G . Weiter seien $p, q : G \rightarrow \mathbb{R}$ C^∞ -differenzierbar mit stetiger Fortsetzung nach $G \cup \gamma$. Dann gilt

$$\iint_G (p_x + q_y) dx dy = \int_\gamma (p dy - q dx).$$

Satz A.2.2 ([Gro88, S.53]):

Sei

$$H(\Delta) := \left\{ f \in \mathcal{O}(\Delta) \left| \frac{1}{\pi} \iint_\Delta |f(z)|^2 dx dy < \infty \right. \right\}.$$

Dann ist $(H(\Delta), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit dem Innenprodukt

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \iint_\Delta f(z) \overline{g(z)} dx dy \quad (\forall f, g \in H(\Delta))$$

ein Hilbertraum.

Lemma A.2.3 ([RS07, S.156]):

Seien $H(\Delta)$ der Hilbertraum aus Satz A.2.2 mit der durch

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \iint_\Delta |f(z)|^2 dx dy}$$

induzierten Norm und $\mathcal{O}(\Delta)$ mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen, dann ist die Injektion $H(\Delta) \rightarrow \mathcal{O}(\Delta); f \mapsto f$ stetig.

Satz A.2.4 ([Gro88, S.67 und Konvention auf S.53]):

Ein vollständiger Unterraum eines Hilbertraums ist ebenfalls ein Hilbertraum.

Definition A.2.5 ([Gro88, S.80]):

Eine reellwertige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt genau dann absolut-stetig, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 \forall n \in \mathbb{N} \forall i \in \mathbb{N}_n \forall [a_i, b_i] \subset [a, b] : \\ & \left([a_i, b_i] \cap [a_j, b_j] = \emptyset \text{ für } i \neq j \text{ und } \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| < \delta(\varepsilon) \right) \\ & \implies \sum_{i=1}^n |f(a_i) - f(b_i)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Bemerkung A.2.6 ([Gro88, S.81]):

Jede absolut-stetige Funktion f ist von beschränkter Variation sowie bis auf eine Lebesgue-Nullmenge differenzierbar.

Die wahre Bedeutung der absolut-stetigen Funktionen liegt darin, dass sie eine Formulierung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bzgl. des Lebesgue-Integrals gestatten.

Satz A.2.7 ([Gro88, S.81]):

Es gilt für $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$:

f ist genau dann absolut-stetig, wenn es eine Funktion

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \varphi = f' \text{ bis auf eine Lebesgue-Nullmenge}$$

sowie

$$f(x) - f(a) = \int_a^x \varphi(t) d\mu(t) \quad \text{für } x \in [a, b]$$

gibt, wobei μ das Lebesgue-Maß bezeichnet.

B Biographie von Löwner

Im Folgenden wird ein wenig aus der Biographie des Namensgebers der Löwner-Familien, *Karl Löwner*, berichtet. Der Text ist eine freie Übertragung des englischsprachigen Artikels von *J.J. O'Connor* und *E.F. Robertson*, wie er auf den Webseiten¹ der Universität von St. Andrews in Schottland zu finden ist.



Abbildung B.1: Karl Löwner

Karl Löwner wurde am 29. Mai 1893 in Lany, einem Dorf in Böhmen (heute Tschechien), etwa 30 Kilometer westlich von Prag gelegen, als Sohn des Sigmund Löwner geboren. Ursprünglich lautete sein Name im Tschechischen *Karel Löwner*, aber er war als *Karl Löwner*, also mit der deutschen Form seines Vornamens, bekannt. Die englische Form seines Namens, *Charles Loewner*, nahm er an, als er später in seinem Leben in die Vereinigten Staaten auswanderte. Im weiteren Text wird er mit „Karl“ oder „Löwner“ bezeichnet, auch in Lebensphasen, in denen er diesen Namen selbst nicht verwendete.

¹<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Loewner.html>

Karl wuchs zusammen mit drei Brüdern und fünf Schwestern in einer großen jüdischen Familie auf. Sein Vater, der einen Laden in Lany besaß, war ein großer Verehrer der deutschen Kultur und hielt insbesondere viel von der deutschen Erziehung. Es entsprach dem Wunsch seines Vaters nach einer Erziehung in deutscher Tradition, dass Karl auf das deutsche Gymnasium in Prag geschickt wurde, wo nicht nur die deutsche Tradition, sondern auch die deutsche Sprache gepflegt wurde. Zuhause in der Familie wurde jedoch Tschechisch gesprochen.

Seinen Schulabschluss machte Karl Löwner 1912 und begann im gleichen Jahr sein Studium in der deutschen Abteilung der Karls-Universität Prag sofort in einem Studiengang, der ihn direkt zur Doktorwürde führen sollte, statt in einem etwas leichteren Studiengang, der ihm die Qualifikation als Lehrer gebracht hätte. Sein Doktorvater in Prag war Georg Pick, der selbst Schüler von Leo Königsberger gewesen war. Seine Dissertation mit dem Titel „Untersuchung über die Verzerrung bei konformen Abbildungen des Einheitskreises $|Z| < 1$, die durch Funktionen mit nicht verschwindender Ableitung geliefert werden“ schrieb Löwner über geometrische Funktionentheorie und erhielt dafür 1917 seinen Dokortitel. Anschließend wurde er als Assistent an die Deutsche Technische Universität in Prag berufen, wo er viereinhalb Jahre, von 1917 bis 1922, arbeitete. Im Hinblick auf tiefergehende mathematische Forschung war diese Position allerdings wenig stimulierend.

Als Löwner 1922 eine Stelle an der Friedrich-Wilhelm-Universität in Berlin angeboten wurde, nahm er diese mit Begeisterung an, obwohl er weiterhin nur als Assistent angestellt war. Zu seinen neuen Kollegen gehörten nun Persönlichkeiten wie Schmidt, Schur, Alfred Brauer und sein Bruder Richard Brauer, Hopf, von Neumann und Szegö – eine überwältigende Ansammlung von Talenten, die ihm die Impulse gab, welche ihm in Prag so gefehlt hatten.

Löwner stieg in Berlin vom Assistenten zum Privatdozenten auf und wurde 1923 habilitiert. 1928 wurde er als außerordentlicher Professor nach Köln berufen, wo er zwei Jahre lehrte, bevor er 1930 an die Karls-Universität Prag zurückkehrte. Unter den Studenten, die Löwner in Prag betreute, war auch Lipman Bers, ein talentierter Student, der vergleichsweise wenig Unterstützung benötigte. In dem von ihm herausgegebenen Buch [Ber88], aus dem im Folgenden noch einige Male zitiert werden wird, schreibt Bers:

Loewner often spoke of his time in Berlin, clearly a happy period of his life. After Prague, the cosmopolitan capital of the Weimar republic must have felt like another world. ... Mathematical life was at a high pitch; for the first time in his life Loewner was surrounded by his mathematical equals.

Am 30. Januar 1933 wurde Hitler zum Reichskanzler Deutschlands ernannt und am 7. April 1933 wurde das „Gesetz zur Wiederherstellung des Berufsbeamtentums“ erlassen, das es der Regierung ermöglichte, politisch missliebige und „nicht-arische“ Beamte zu entlassen – unter anderen also auch jüdische Lehrer an Schulen und Universitäten. Dies betraf Löwner in Prag zwar nicht direkt, aber er beobachtete mit wachsendem Unbehagen das Leiden seiner jüdischen Kollegen in Deutschland und versuchte diese zu unterstützen, wo immer es möglich war.

Auch wenn die äußere politische Lage beunruhigend war, so hatte Löwner doch in seinem persönlichen Leben eine ausgesprochen glückliche Zeit. 1934 heiratete er Elisabeth Alexander, eine aus Breslau stammende ausgebildete Sängerin. Löwner nahm Klavierstunden, um seine Frau bei ihren Gesangsübungen begleiten zu können. 1936 wurde ihre Tochter Marion geboren. Sie lebten glücklich in Prag, verschlossen aber nicht die Augen vor den Ereignissen in Deutschland und bereiteten sich auf die unvermeidlichen Folgen vor, indem sie nach dem Anschluss Österreichs an das Deutsche Reich begannen, Englisch zu lernen, um für den Tag, an dem sie ihre Heimat verlassen müssten, gerüstet zu sein.

Obwohl er sich der stetig wachsenden Gefahr bewusst war, lebte Löwner mit seiner Familie noch in Prag, als Hitler Böhmen und Mähren besetzen ließ. Löwner wurde unverzüglich ins Gefängnis gesteckt, wo man ihn eine Woche lang festhielt. Nach Zahlung der doppelten „Auswanderungssteuer“ wurde ihm gestattet, das Land mit seiner Familie zu verlassen. Bers glaubt, dass das Gelingen der Flucht in erster Linie dem unermüdlichen Einsatz von Löwners Frau zu verdanken war:

The Loewners arrived in America penniless, but managed to bring their furniture and books.

Als klares Signal für einen Neubeginn in einem neuen Land änderte er seinen Namen in *Charles Loewner*. Von Neumann verschaffte ihm eine Stelle an der Louisville University in Kentucky und das Flüchtlingshilfekomitee in den Vereinigten Staaten übernahm die Zahlung seines Gehalts für das erste Jahr. Für einen 46-jährigen, hoch geachteten Mathematiker war es schwer, noch einmal ganz unten anzufangen:

... teaching many hours of elementary courses and having to grade staggering piles of homework. Some students asked him to teach an advanced course, but when he agreed to do so, without additional remuneration, he was told, first, that this would take his mind off his primary duties, and then, that there was no free classroom. Finally Loewner taught his advanced course in a local brewery before the arrival of the morning shift.

1944 wechselte er an die Brown University in Providence/Rhode Island und arbeitete in militärischen Projekten mit. Er leistete Beiträge zur Strömungsmechanik, insbesondere im Bereich kritischer Unterschallströmungen. Andere Resultate ergaben sich aus seinen Forschungen zur Abwehr von Flugbomben.

Von 1946 an lehrte und forschte er für fünf Jahre an der Syracuse University in New York, bevor er an die University of Stanford in Kalifornien berufen wurde:

This was the right place for him and his family. He loved the California weather and the California nature. The house in Los Altos was the first real home the Loewners had since Prague. Among the distinguished mathematicians there were his old friends Bergman and Szegö, and he always knew how to make new friends. He had people to make music with and people to hike with (he said that he got his best mathematical ideas while walking). He was a magnificent lecturer and students flocked to his courses and to his famous problem seminar. Only the untimely death of Elisabeth Loewner in 1956 darkened the California years.

Als Mensch wird Löwner von Bers mit folgenden Worten beschrieben:

Loewner was a man whom everybody liked, perhaps because he was a man at peace with himself. He conducted a life-long passionate love affair with mathematics, but was neither competitive, nor jealous, nor vain. His kindness and generosity in scientific matters, to students and colleagues alike, were proverbial. He seemed to be incapable of malice. His manners were mild and even diffident, but those hid a will of steel. Without being religious he strongly felt his Jewish identity. Without forgetting his native Czech he spoke pure and precise German ... Without having any illusions about Soviet Russia he was a man of the left. He was a good storyteller, with a sense of humour which was at once Jewish and humanistic. But first and foremost he was a mathematician.

Seine Forschungsarbeit und die Betreuung von Doktoranden setzte Löwner auch nach seiner formalen Pensionierung im Jahre 1963 als Professor Emeritus fort. Seine mathematischen Aktivitäten dauerten unvermindert an, bis er am 8. Januar 1968 nach kurzer Krankheit im Alter von 75 Jahren in Stanford in Kalifornien starb.

Löwners mathematische Forschungsergebnisse waren von höchster Qualität, er hatte jedoch die Angewohnheit, nur Resultate zu veröffentlichen, die er selbst für bedeutsam hielt. Ohne zu übertreiben, können einige davon als Meisterwerke bezeichnet werden.

Wie bereits erwähnt beschäftigte sich Löwner mit geometrischer Funktionentheorie. Über dieses Gebiet schrieb er eine Serie von Artikeln, die 1923 in einem Beweis eines Spezialfalls der Bieberbachschen Vermutung gipfelte[Löw23]. Es sei hier noch einmal angemerkt, dass Löwner in seinem Beweis die Löwnersche Differentialgleichung verwendet, die, seit er sie eingeführt hat, ausgiebig untersucht worden ist und die eine wesentliche Rolle im Beweis der Bieberbachschen Vermutung von de Branges spielt.

Einen weiteren wichtigen Artikel schrieb Löwner über n -monotone Funktionen, bei denen es sich um eine Verallgemeinerung der üblichen Vorstellung von Monotonie handelt. Bers schreibt:

... both the problem posed and the answer given are totally unexpected.
The functions which Loewner called n -monotonic turned out to be of
importance for electrical engineering and for quantum physics ...

In diesem Zusammenhang erforschte Löwner auch ordnungserhaltende Abbildungen und Halbgruppen solcher Abbildungen. Später betrachtete er diese in abstrakterer Form und erzielte weitere schöne Ergebnisse zur Charakterisierung projektiver Abbildungen und gewisser geometrischer Objekte.

C Literatur

- [Ber88] BERS, LIPMAN (Herausgeber): *Charles Loewner, Collected Papers*. Birkhäuser, Boston, 1988.
- [Bie16] BIEBERBACH, L.: *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Seiten 940–955, 1916.
- [DD04] DUMA, A. und E. DRAGHICI: *Kurs 1343: Konforme Abbildungen und schlichte Funktionen für Anwendungen in der Strömungsmechanik*. FernUniversität in Hagen, 2004.
- [DR72] DIEDERICH, K. und R. REMMERT: *Funktionentheorie I*. Springer Verlag, 1972.
- [Dur83] DUREN, P.L.: *Univalent Functions*. Springer Verlag, 1983.
- [For77] FORSTER, O.: *Riemannsche Flächen*. Springer Verlag, 1977.
- [Gro88] GROSSMANN, S.: *Funktionalanalysis*. AULA-Verlag, 4. Auflage, 1988.
- [Koe94] KOEPF, W.: *Von der Bieberbachschen Vermutung zum Satz von de Branges sowie der Beweisvariante von Weinstein*, Seiten 175–193. Vieweg, 1994.
- [Lan93] LANG, S.: *Complex Analysis*. Springer Verlag, 3. Auflage, 1993.
- [Löw23] LÖWNER, K.: *Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises*. Mathematische Annalen, 89:103–121, 1923.
- [Mon74] MONTEL, P.A.: *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*. Chelsea Publishing Company, 2. Auflage, 1974.
- [Pom75] POMMERENKE, CH.: *Univalent Functions*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [Rog32] ROGOSINSKI, W.: *Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen*. Mathematische Zeitschrift, 35:93–121, 1932.
- [RR94] ROSENBLUM, M. und J. ROVNYAK: *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*. Birkhäuser Verlag, 1994.
- [RS07] REMMERT, R. und G. SCHUMACHER: *Funktionentheorie 2*. Springer Verlag, 3., neu bearbeitete Auflage, 2007.
- [Sch93] SCHIFF, J.L.: *Normal Families*. Springer Verlag, 1993.
- [Wei91] WEINSTEIN, L.: *The Bieberbach Conjecture*. Internat. Math. Res. Notices, 5:61–64, 1991.

Danksagung

Während meiner gesamten Studienzeit an der FernUniversität in Hagen hat Herr Prof. Dr. Andrei Duma für mich eine besondere Rolle gespielt. Daher möchte ich mich an dieser Stelle bei ihm nicht nur für die hervorragende Betreuung während meiner Diplomarbeit, sondern auch für sein stets offenes Ohr und seine Unterstützung in schwierigen Studiumsphasen herzlich bedanken.

Weiterhin danke ich Herrn Dipl.-Math. Klaus Kuzyk dafür, mein Interesse an der Thematik dieser Arbeit geweckt zu haben, und für die intensiven und konstruktiven Diskussionen, die ich mit ihm führen durfte.

Ganz besonders danken möchte ich auch meiner Ehefrau, Pirkko Anneli Telle, für ihre Geduld, mit der sie mein Mathematik-Studium all die Jahre begleitet und unterstützt hat.

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt und die den benutzten Quellen wörtlich oder inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegen.

Köln, den 28. September 2007